



Modélisation mathématique de phénomènes électromagnétiques dans des matériaux à fort contraste

Victor Péron

► To cite this version:

Victor Péron. Modélisation mathématique de phénomènes électromagnétiques dans des matériaux à fort contraste. Mathématiques [math]. Université Rennes 1, 2009. Français. NNT: . tel-00421736

HAL Id: tel-00421736

<https://theses.hal.science/tel-00421736>

Submitted on 2 Oct 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE / UNIVERSITÉ de RENNES 1

sous le sceau de l'Université Européenne de Bretagne

pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L' UNIVERSITÉ DE RENNES 1

Mention : Mathématiques et Applications

École Doctorale MATISSE

présentée par

Victor PÉRON

préparée à l'UMR 6625 CNRS - IRMAR

Institut de Recherche Mathématique de Rennes

U.F.R. de Mathématique

INTITULÉ DE LA THÈSE

Thèse soutenue à Rennes
le 24 Septembre 2009

devant le jury composé de :

***Modélisation
mathématique
de phénomènes
électromagnétiques
dans des matériaux
à fort contraste***

Abderrahmane BENDALI :	Professeur
(INSA Toulouse)	Rapporteur
Gabriel CALOZ :	Professeur
(Université de Rennes 1)	Directeur de thèse
Monique DAUGE :	Directeur Recherches CNRS
(Université de Rennes 1)	Directeur de thèse
Erwan FAOU :	Directeur Recherches INRIA
(ENS Cachan Bretagne)	Examineur
Serge NICAISE :	Professeur
(Université de Valenciennes)	Examineur
Ernst STEPHAN :	Professeur
(Université de Hannovre)	Rapporteur

Remerciements

Je remercie chaleureusement Monique et Gabriel qui m'ont permis de réaliser ces travaux. Ces trois années sont passées très vite, et j'ai beaucoup appris grâce à vous. Vous avez su être patient et m'accorder de votre temps. Votre compétence et complémentarité m'ont aussi beaucoup apporté, alors Merci !

Je tiens à adresser mes remerciements à mes rapporteurs Abderrhamane Bendali et Ernst Stephan pour avoir accepté leur rôle de relire ce mémoire, ainsi que pour leur participation au jury. Je remercie enfin Serge et Erwan pour l'intérêt que vous portez à mon travail ainsi que pour votre participation au jury.

Durant ces années de thèse, j'ai eu l'occasion de faire la connaissance de nombreuses personnes au contact desquels j'ai beaucoup appris. J'adresse mes remerciements à Clair avec et grâce à qui je vais continuer en post-doc à Bordeaux. Les échanges avec les membres de l'équipe au labo ont toujours été enrichissant et sympa : merci à Martin (mon tuteur), Eric, Grégory, Virginie, Daniel, Yvon, François, Rozenn, Fabrice, ainsi que Lalaonirina, Fulgence et Loïc. J'adresse un grand merci à tout le personnel de l'UFR et de l'IRMAR : Claude, Véronique, Chantal, Marie-Aude... Je salue biensûr les doctorants de l'IRMAR avec qui on a passé que des bons moments, en particulier mais collègues et anciens collègues de bureau : Polynice, Nicolas, Frédérique, Fanny, Ludo, Jimmy ; et aussi tous les autres thésards que j'ai cotoyé pendant ma thèse, en particulier : Géraldine, Anne-Claire, Gweltaz, Thomas, les deux Adriens, Nirmal, John, Maher, Alina, Dorian, Adil, Aurélien, Marie.

Je salue aussi tous mes amis qui m'ont encouragé pendant ces années : Ariane, Arnaud, Stéphane, Anne-Gaëlle, Jacques, Marie, Philippe, Marie, Yves, Solenn, Jérôme, Karine, Nico, Pauline, Olivier, David, Pierre, Manu, Typhaine...

Je remercie enfin tous mes proches et toute ma famille pour m'avoir supporté pendant ces trois ans, en particulier mes parents, Fanch et Anne-Marie, ainsi que tous mes frères et belles soeurs.

Table des matières

Introduction générale	1
1 Problème de transmission scalaire	13
1.1 Introduction	13
1.2 Un problème de transmission scalaire	13
1.3 Une famille de problèmes à paramètre	15
1.4 Développement en série	17
1.4.1 Condition au bord de Neumann	17
1.4.2 Condition au bord de Dirichlet	20
1.5 Cas d'une interface polyédrale	22
1.5.1 Régularité elliptique	23
1.5.2 Cas d'une interface cylindrique	25
2 Problème de transmission électromagnétique	27
2.1 Introduction	27
2.2 Description du modèle physique	28
2.2.1 Les équations de Maxwell harmoniques	28
2.2.2 Le système de Maxwell à petit paramètre	30
2.3 Formulations variationnelles	30
2.3.1 Espaces variationnels	30
2.3.2 Problème variationnel en champ électrique	33
2.3.3 Equations de Maxwell régularisées	36
2.3.4 Estimation a priori uniforme	41
2.4 Une décomposition du champ électrique	42
2.4.1 Existence d'un potentiel vecteur tangentiel	42
2.4.2 Existence d'un potentiel vecteur normal	44
2.4.3 Une formulation variationnelle pour la partie scalaire	44
2.5 Démonstration de l'estimation a priori uniforme	45
2.6 Cas d'une interface polyédrale	50
2.6.1 Potentiel vecteur dans un domaine non-régulier	50
2.6.2 Démonstration des estimations a priori	51

2.6.3	Décroissance exponentielle intérieure de la solution	52
3	Equations de Maxwell en coordonnées normales	53
3.1	Introduction	53
3.2	Présentation du problème	53
3.2.1	Les équations en champ électrique	53
3.2.2	Voisinage tubulaire de l'interface	56
3.3	Coordonnées normales et Tenseurs	57
3.3.1	Coordonnées normales	57
3.3.2	Dérivées covariantes	58
3.3.3	Propriétés de la dérivée covariante	59
3.3.4	Tenseurs fondamentaux	61
3.4	Divergence et Rotationnel en paramétrisation normale	61
3.4.1	L'opérateur Divergence	61
3.4.2	L'opérateur Rotationnel	63
3.5	Equations de Maxwell en paramétrisation normale	68
3.5.1	Le rotationnel du rotationnel	69
3.5.2	Equations tridimensionnelles	75
4	Développement des équations dans le conducteur	79
4.1	Introduction	79
4.2	Le shifter	79
4.3	Développements en séries entières	81
4.3.1	Formes fondamentales	81
4.3.2	Développement de la dérivée covariante	81
4.3.3	Changement d'échelle	81
4.3.4	Opérateurs 2D	82
4.3.5	Développement en séries entières de l'opérateur 3D	83
4.4	Développements en séries des tenseurs fondamentaux	86
4.4.1	Tenseur de changement de métrique	86
4.4.2	Développement en série du tenseur de courbure surfacique	88
4.5	Développements des opérateurs	90
4.5.1	Réécriture des opérateurs	90
4.5.2	Développements des opérateurs transverses	91
4.5.3	Développements des opérateurs surfaciques	92
4.5.4	Développement de la divergence	94
4.5.5	Récapitulation	94
5	Développement du champ électrique	97
5.1	Introduction	97
5.2	Présentation du problème	97

5.2.1	Cadre d'étude	98
5.2.2	Ansatz	99
5.2.3	Equations surfaciques dans le domaine conducteur	100
5.2.4	Equations transverses dans le domaine conducteur	101
5.2.5	Equations dans le domaine isolant	101
5.3	Construction des termes du développement	102
5.3.1	Termes d'ordre 0	102
5.3.2	Termes d'ordre 1	103
5.3.3	Termes d'ordre 2	104
5.3.4	Termes d'ordre supérieur	106
5.3.5	Synthèse du développement asymptotique	110
5.4	Relations de compatibilité	113
5.4.1	Relations de compatibilité sur la divergence	113
5.4.2	Relations de compatibilité à l'interface	115
6	Développement du champ magnétique	117
6.1	Introduction	117
6.2	Développement de l'opérateur rotationnel	117
6.2.1	Développement du tenseur de Levi-Civita	119
6.2.2	Développement de la composante transverse du rotationnel	120
6.2.3	Développement de la composante surfacique du rotationnel	121
6.3	Reconstruction du champ magnétique	121
6.3.1	La loi de Faraday en paramérisation normale	122
6.3.2	Enoncé du résultat principal	122
6.3.3	Calcul des premiers termes	124
6.3.4	Une autre méthode de calcul des composantes surfaciques	127
6.3.5	Calcul des composantes covariantes des premiers termes	129
6.4	Développement asymptotique du champ magnétique	131
6.4.1	Formulation variationnelle	131
6.4.2	Equations en paramétrisation normales	133
6.4.3	Développement en série entière de l'opérateur 3D	134
6.4.4	Développement asymptotique	136
6.5	Comparaison et synthèse des développements	145
7	Convergence du développement asymptotique	149
7.1	Introduction	149
7.2	Etude des restes	149
7.2.1	Cadre d'étude	149
7.2.2	Sommes partielles	151
7.2.3	Etude des restes	152
7.3	Estimations des restes	156

7.3.1	Terme correcteur	156
7.3.2	Estimations des restes	159
7.3.3	Estimations optimales des restes	161
8	Calculs éléments finis	163
8.1	Introduction	163
8.2	Axisymétrie	163
8.2.1	Domaine axisymétrique	164
8.2.2	Conditions de transmission en axisymétrie	165
8.2.3	Problème avec donnée axisymétrique	166
8.2.4	Problème avec donnée axisymétrique et orthoradiale	168
8.3	Géométrie axisymétrique et cylindrique	170
8.3.1	Résultats théoriques	174
8.3.2	Simulations numériques	178
8.3.3	Remarque sur l'influence de la géométrie de l'interface	181
8.4	Géométrie sphérique	182
8.4.1	Résultats théoriques	184
8.4.2	Simulations numériques	186
8.5	Géométrie ellipsoïdale	192
8.5.1	Résultats théoriques	194
8.5.2	Simulations numériques	196
8.5.3	Résultats numériques hors maillage	199
9	Conditions de transmission approchées	201
9.1	Introduction	201
9.2	Motivations	202
9.3	Maxwell equations using differential forms	203
9.3.1	The considered problem	204
9.3.2	Variational formulation.	206
9.3.3	Main result	210
9.4	Geometry	214
9.4.1	Parameterization of Γ	214
9.4.2	The transmission conditions in local coordinates	215
9.4.3	Rescaling in the thin layer	215
9.5	Ansatz and formal expansion	216
9.5.1	Order 0	217
9.5.2	Order 1	218
9.5.3	Order 2	219
9.6	Justification of the expansion	221
9.6.1	Regularity results	222
9.6.2	Convergence	223

Introduction générale

Cette thèse est consacrée à l'étude de problèmes de transmission d'ondes électromagnétiques dans des matériaux à fort contraste, comme par exemple un corps fortement conducteur entouré d'un matériau diélectrique isolant. On va analyser finement le phénomène de l'*effet de peau* à l'aide de l'analyse multi-échelle et de la simulation numérique. D'autre part, on présente aussi des conditions de transmission approchées pour un problème de *membrane mince* posé dans une cellule biologique.

A. Présentation des problèmes

Le problème de l'*effet de peau*

Le problème mathématique considéré est basé sur les équations de Maxwell tridimensionnelles en régime harmonique. Il est posé dans un domaine constitué d'un sous-domaine conducteur entouré d'un domaine isolant. Un petit paramètre δ est introduit, inversement proportionnel à la racine carrée de la conductivité électrique du matériau conducteur. Précisément, si σ désigne la conductivité électrique du conducteur, $\omega > 0$ la pulsation du signal, et ε_0 la permittivité électrique du vide, on a

$$\delta = \sqrt{\frac{\omega \varepsilon_0}{\sigma}}.$$

Alors dans le corps conducteur on a $0 < \delta \ll 1$, tandis que dans l'isolant le paramètre sera absent. Une étude en champ électrique \mathbf{E}_δ de ces équations nous amène à considérer le problème de transmission ci-dessous posé dans un domaine $\Omega = \Omega_{\text{cd}} \cup \Sigma \cup \Omega_{\text{is}}$ de \mathbb{R}^3 , voir la Figure 1 :

$$(1) \quad \begin{cases} \text{rot rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} & = \mu \mathbf{F}^{\text{is}} & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \text{rot rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}} - \kappa^2 (1 + \frac{i}{\delta^2}) \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}} & = \mu \mathbf{F}^{\text{cd}} & \text{dans } \Omega_{\text{cd}} \\ \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}} \times \mathbf{n} & = \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \\ \text{rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}} \times \mathbf{n} & = \text{rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \\ \text{rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \times \mathbf{n} & = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Ici $\mathbf{E}_\delta^{\text{is}}$ et $\mathbf{E}_\delta^{\text{cd}}$ sont les restrictions de \mathbf{E}_δ aux sous-domaines Ω_{is} et Ω_{cd} respectivement, κ et μ sont des nombres réels strictement positifs. D'un point de vue physique, κ représente le nombre d'onde et μ la quantité $\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}$, où μ_0 est la perméabilité magnétique dans l'air. Enfin, \mathbf{n} désigne la normale entrante pour Ω_{cd} et sortante pour Ω_{is} . Les deux premières équations aux dérivées partielles régissent le comportement du champ électrique dans les sous-domaines isolant et conducteur. Les deux équations suivantes posées sur l'interface Σ sont les conditions de transmission du champ électrique tandis que les deux dernières sont les conditions de bord. La dernière condition modélise une hypothèse de type isolant parfait sur le bord du domaine. Par la suite, nous considérerons aussi une condition de type conducteur parfait.

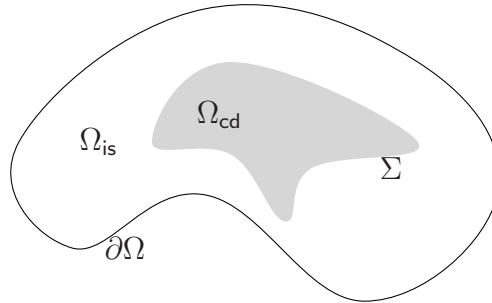


Figure 1 : Le domaine Ω

D'un point de vue physique, il est bien connu que dans un tel cadre, on constate une décroissance très forte de l'amplitude du champ électrique dans le conducteur près de sa surface Σ . Ce phénomène physique est bien connu, il s'agit de l'*effet de peau*.

On retrouve une littérature abondante au sujet de ce phénomène. Sur les études physiques, on peut citer par exemple, [11], [49], [68]. Sur le plan mathématique, on relève les références suivantes [33], [62], [42], [43], [61], [6].

Notre travail consistera à mettre en évidence l'influence du petit paramètre δ sur la solution \mathbf{E}_δ du problème (1).

Le problème d'une *membrane mince*

L'objet de ce problème est l'étude du comportement asymptotique du champ électromagnétique dans une cellule biologique lorsque l'épaisseur ε de sa membrane tend vers 0. La cellule est composée d'un cytoplasme \mathcal{O}_c entouré d'une fine membrane $\mathcal{O}_m^\varepsilon$ et plongée dans un milieu ambiant $\mathcal{O}_e^\varepsilon$, voir la Figure 2 ci-dessous.

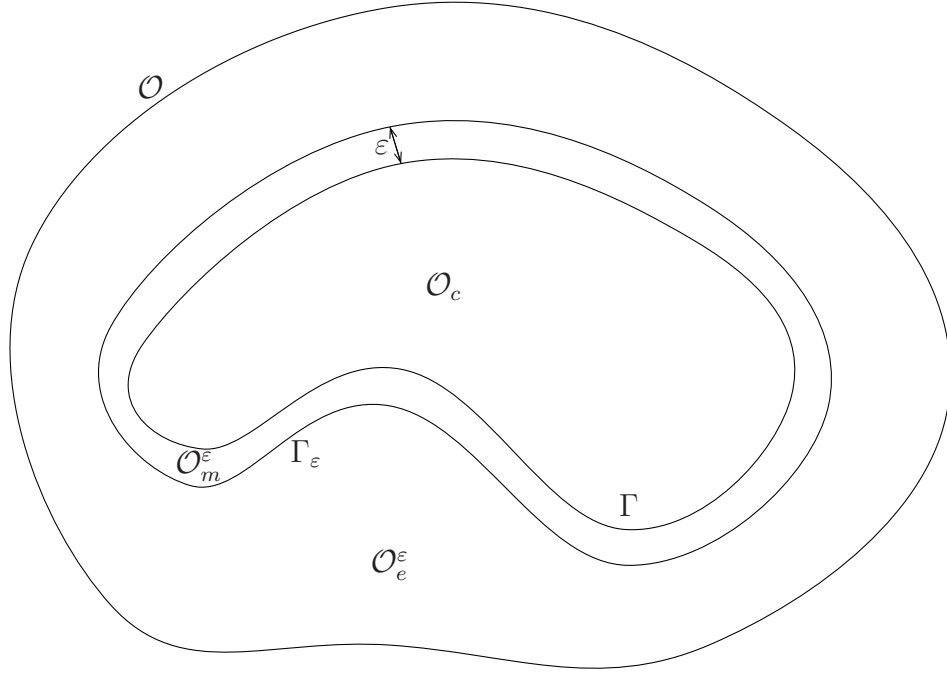


Figure 2 : Géométrie de la cellule

Le problème mathématique considéré est basé sur les équations de Maxwell tridimensionnelles en régime harmonique et posé dans un domaine \mathcal{O} indépendant de ε :

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_e^\varepsilon \cup \overline{\mathcal{O}_m^\varepsilon} \cup \mathcal{O}_c.$$

Une étude en champ électrique \mathbf{E}_ε de ces équations nous amène à considérer le problème de transmission ci-dessous posé dans le domaine \mathcal{O} de \mathbb{R}^3 :

$$\delta \left(\frac{1}{\mu_\varepsilon} d\mathbf{E}_\varepsilon \right) - q_\varepsilon \mathbf{E}_\varepsilon = \mathbf{J} \quad \text{dans } \mathcal{O}, \quad \mathbf{E}_\varepsilon \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}.$$

Ici, les opérateurs δ et d sont respectivement la codifférentielle et la différentielle extérieure sur \mathcal{O} . De plus, \mathbf{E}_ε est une 1 forme sur \mathcal{O} et \mathbf{J} est une source de courant à support dans un domaine extérieur fixe $\mathcal{O}_e^{d_0}$ telle que $\delta\mathbf{J} = 0$ dans \mathcal{O} . Enfin, μ_ε et q_ε sont deux fonctions constantes par morceaux définies dans \mathcal{O} par

$$\forall x \in \mathcal{O}, \quad \mu_\varepsilon(x) = \begin{cases} \mu_e & \text{dans } \mathcal{O}_e^\varepsilon \\ \mu_m & \text{dans } \mathcal{O}_m^\varepsilon \\ \mu_c & \text{dans } \mathcal{O}_c \end{cases} \quad \text{et} \quad q_\varepsilon(x) = \begin{cases} q_e & \text{dans } \mathcal{O}_e^\varepsilon \\ q_m & \text{dans } \mathcal{O}_m^\varepsilon \\ q_c & \text{dans } \mathcal{O}_c \end{cases}$$

où μ_e , μ_m et μ_c sont des constantes positives et q_e , q_m , q_c sont des nombres complexes. On suppose de plus qu'il existe des constantes $c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout $x \in \mathcal{O}$,

$$c_1 \leq -\operatorname{Im}(q_\varepsilon(x)) \leq c_2, \quad 0 < \operatorname{Re}(q_\varepsilon(x)) \leq c_2$$

Le problème mathématique consistera à calculer des conditions de transmission sur le bord du cytoplasme Γ équivalentes à la couche mince $\mathcal{O}_m^\varepsilon$. Ce travail consiste à étendre les travaux [55, 57, 56, 12] aux équations de Maxwell en régime harmonique.

B. Principaux résultats

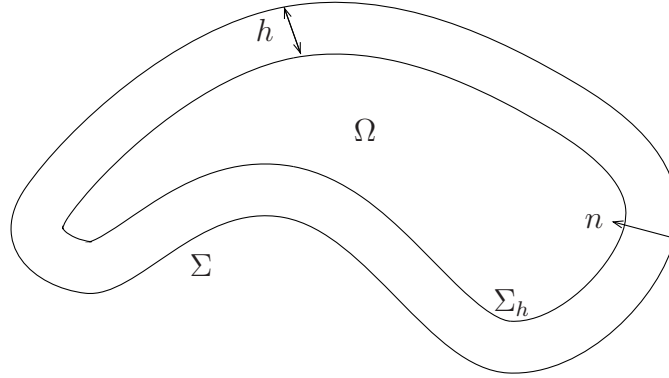
Nous avons traité les questions relatives à l'existence et l'unicité d'une solution du problème (1). En introduisant une formulation variationnelle dans un cadre fonctionnel adapté, on démontre l'existence et l'unicité de \mathbf{E}_δ dans l'espace $\mathbf{X}_\Gamma(\Omega, \delta)$ des fonctions vectorielles dont le rotationnel de \mathbf{E}_δ et la divergence de $\varepsilon(\delta)\mathbf{E}_\delta$ où

$$\varepsilon(\delta) = \frac{1}{\mu} (\mathbf{1}_{\Omega_{is}} + (1 + \frac{i}{\delta^2}) \mathbf{1}_{\Omega_{cd}})$$

sont de carré intégrable, et satisfont la condition $\mathbf{E}_\delta \cdot \mathbf{n} = 0$ sur le bord du domaine Ω , voir [13], [50]. Il s'agit maintenant de décrire le comportement de \mathbf{E}_δ en fonction de δ , pour δ très petit. Pour cela, on va effectuer un développement asymptotique multi-échelle de \mathbf{E}_δ , ce qui nécessite l'utilisation du calcul tensoriel dans un système de coordonnées adaptées.

Utilisation du calcul tensoriel (chapitres 3 & 4)

On se place dans l'hypothèse où le bord Σ du domaine Ω_{cd} est régulier. On utilise une technique de paramétrisation normale, voir [25, 26, 27], pour exprimer les équations posées dans le domaine Ω_{cd} dans un système de *coordonnées normales* (y_α, h) définies dans un voisinage tubulaire \mathcal{O} de l'interface Σ , voir la Figure 3.

Figure 3 – Un voisinage tubulaire \mathcal{O} de Σ

L'opérateur rotationnel en paramétrisation normale admet la décomposition suivante en composantes contravariantes

$$(5) \quad \begin{cases} (\nabla \times \mathbf{E})^\alpha = \epsilon^{3\beta\alpha} (\partial_3^h E_\beta - \partial_\beta E_3) & \text{sur } \Sigma_h \\ (\nabla \times \mathbf{E})^3 = \epsilon^{3\alpha\beta} D_\alpha^h E_\beta & \text{sur } \Sigma_h \end{cases}$$

où ϵ^{ijk} est le tenseur de Levi-Civita et D^h est la dérivée covariante sur la variété Σ_h , surface moyenne de hauteur h par rapport à Σ dans le conducteur, voir la Figure 3. Le calcul tensoriel permet d'expliciter l'opérateur du second ordre associé au problème (1) en paramétrisation normale. De plus, la condition de transmission d'ordre 1 à l'interface Σ dans le problème (1) s'écrit en paramétrisation normale

$$(\partial_3^h E_\alpha^{\text{cd}} - \partial_\alpha E_3^{\text{cd}}) dy^\alpha = \text{rot } \mathbf{E}^{\text{is}} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma.$$

On effectue le changement de variable suivant de la coordonnée normale h dans le voisinage tubulaire \mathcal{O}

$$Y_3 = \frac{h}{\delta}$$

puis, on explicite le rôle du petit paramètre δ dans les équations posées dans le domaine conducteur en développant les équations en série selon les puissances de δ .

Analyse asymptotique multi-échelle (chapitres 5 & 6)

A partir du développement de l'opérateur associé au problème (1) en puissance de δ , on calcule au chapitre 5 un développement asymptotique double-échelle du champ électrique \mathbf{E}_δ . Puisque l'interface Σ est une surface de classe \mathcal{C}^∞ , ce développement asymptotique est constitué par une série de termes standards dans le domaine isolant et

par une série de termes profils exponentiellement décroissants dans le domaine conducteur. Le champ électrique \mathbf{E}_δ admet le développement asymptotique suivant

$$(6) \quad \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \simeq \mathbf{E}_0^{\text{is}} + \delta \mathbf{E}_1^{\text{is}} + \delta^2 \mathbf{E}_2^{\text{is}} + \dots \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}}$$

et

$$(7) \quad \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}}(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{W}_0^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{h}{\delta}) + \delta \mathbf{W}_1^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{h}{\delta}) + \delta^2 \mathbf{W}_2^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{h}{\delta}) + \dots \quad \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O}$$

où les \mathbf{W}_j^{cd} s'expriment dans les coordonnées (y_α, Y_3) . Pour $s \geq 2$ et une donnée $\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s-2}(\Omega)$ telle que $\mathbf{F} = 0$ dans Ω_{cd} , et sous l'hypothèse spectrale 2.24 sur κ , on construit successivement les termes indépendants de δ

$$\mathbf{W}_j^{\text{cd}} \in \mathbf{H}^{s-j-\frac{1}{2}}(\Sigma, \mathcal{C}^\infty(I)) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_j^{\text{is}} \in \mathbf{H}^{s-j}(\Omega_{\text{is}})$$

pour tout $j = 0, \dots, \lfloor s \rfloor - 2$. Le terme $\mathbf{W}_0^{\text{cd}} = 0$ et \mathbf{E}_0^{is} vérifie les EDP suivantes

$$\begin{cases} \text{rot rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{E}_0^{\text{is}} = \mu \mathbf{F}^{\text{is}} & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De plus, pour tout $j = 1, \dots, \lfloor s \rfloor - 2$, il existe un opérateur tangentiel \mathfrak{T}_j

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_j : \mathbf{H}^s(\Omega_{\text{is}}) &\rightarrow \mathbf{H}^{s-j-\frac{1}{2}}(\Sigma) \\ \mathbf{E}_0^{\text{is}} &\mapsto \mathbf{E}_j^{\text{is}} \times \mathbf{n}|_\Sigma \end{aligned}$$

tel que

$$\mathbf{E}_j^{\text{is}} = \mathcal{R}^{\text{is}} \circ \mathfrak{T}_j(\mathbf{E}_0^{\text{is}})$$

où \mathcal{R}^{is} est un opérateur défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^{\text{is}} : \mathbf{H}^{t-\frac{1}{2}}(\Sigma) &\rightarrow \{\mathbf{E}^{\text{is}} \in \mathbf{H}^t(\Omega_{\text{is}}) \mid \text{div } \mathbf{E}^{\text{is}} = 0\} \\ \mathbf{G} &\mapsto \mathbf{E}^{\text{is}} \end{aligned}$$

et continu pour tout réel $t \geq 2$, où \mathbf{E}^{is} est l'unique solution au sens des distributions des EDP suivantes

$$\begin{cases} \text{rot rot } \mathbf{E}^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{E}^{\text{is}} = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \mathbf{E}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = \mathbf{G} & \text{sur } \Sigma \\ \text{rot } \mathbf{E}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

En particulier, on a

$$\mathfrak{T}_1(\mathbf{E}_0^{\text{is}}) = -\frac{1}{\lambda}(\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}$$

$$\mathfrak{T}_2(\mathbf{E}_0^{\text{is}}) = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{\lambda} \{ b_\alpha^\sigma (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma dy^\alpha - \frac{1}{2} b_\sigma^\sigma \text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n} \} - \text{rot } \mathcal{R}^{\text{is}} \circ \mathfrak{T}_1(\mathbf{E}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n} \right] \times \mathbf{n}$$

De plus, on a explicité les premiers termes du développement dans le conducteur, le premier terme non-nul étant la composante surfacique de \mathbf{W}_1^{cd} . Dans un système de *coordonnées normales*, on note $\mathcal{W}_{\alpha,j}$ les composantes surfaciques de \mathbf{W}_j , vu comme un champ de 1-formes, et w_j sa composante normale de sorte que $\mathbf{W}_j = (\mathcal{W}_{\alpha,j}, w_j)$. On a

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_0(y_\beta, Y_3) &= 0, \\ \mathcal{W}_{\alpha,1}(y_\beta, Y_3) &= -j_{\alpha,0}(y_\beta) e^{-\lambda Y_3} \quad \text{et} \quad w_1 = 0, \\ \mathcal{W}_{\alpha,2}(y_\beta, Y_3) &= \left[\lambda^{-1} \{ b_\alpha^\sigma j_{\sigma,0} - \mathcal{H} j_{\alpha,0} \} - j_{\alpha,1} + Y_3 \{ b_\alpha^\sigma j_{\sigma,0} - \mathcal{H} j_{\alpha,0} \} \right] (y_\beta) e^{-\lambda Y_3}, \\ w_2(y_\beta, Y_3) &= -\lambda^{-1} D_\alpha j_0^\alpha (y_\beta) e^{-\lambda Y_3}, \end{aligned}$$

où $\lambda = \kappa e^{-i\pi/4}$, $j_{\alpha,k}(y_\beta) := \lambda^{-1}(\text{rot } \mathbf{E}_k^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\alpha(y_\beta, 0)$ pour $k = 0, 1$, b_α^σ est un terme de courbure de l'interface Σ , $\mathcal{H} = \frac{1}{2} b_\alpha^\alpha$ est la courbure moyenne de Σ et D_α est la dérivée covariante sur Σ . La composante surfacique du terme d'ordre 3 est aussi calculée. Enfin, pour tout $j \geq 3$, les termes $\mathcal{W}_{\alpha,j}^{\text{cd}}$ et w_j^{cd} ont la structure suivante

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_{\alpha,j}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) &= [a_{\alpha,j}^0(y_\beta) + Y_3 a_{\alpha,j}^1(y_\beta) + \cdots + Y_3^{j-1} a_{\alpha,j}^{j-1}(y_\beta)] e^{-\lambda Y_3}, \\ w_j^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) &= [c_j^0(y_\beta) + Y_3 c_j^1(y_\beta) + \cdots + Y_3^{j-2} c_j^{j-2}(y_\beta)] e^{-\lambda Y_3}. \end{aligned}$$

Une synthèse précise du développement asymptotique est énoncée au paragraphe 5.3.5.

On calcule au chapitre 6 un développement asymptotique du champ magnétique \mathbf{H}_δ à partir de la loi de Faraday. On effectue pour cela le développement de l'opérateur rotationnel en paramétrisation normale (5), et on substitue le développement asymptotique du champ électrique (6)-(7). Sous l'hypothèse spectrale 2.24, les termes \mathbf{H}_j^{is} et \mathbf{H}_j^{cd} sont déterminés de façon unique, voir le paragraphe 6.5 pour des résultats précis. On a

$$\mathbf{H}_\delta^{\text{is}} \simeq \mathbf{H}_0^{\text{is}} + \delta \mathbf{H}_1^{\text{is}} + \delta^2 \mathbf{H}_2^{\text{is}} + \cdots \quad \text{dans} \quad \Omega_{\text{is}}$$

et

$$\mathbf{H}_\delta^{\text{cd}}(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{H}_0^{\text{cd}}(\mathbf{x}; \delta) + \delta \mathbf{H}_1^{\text{cd}}(\mathbf{x}; \delta) + \delta^2 \mathbf{H}_2^{\text{cd}}(\mathbf{x}; \delta) + \cdots \quad \text{si} \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\text{cd}}$$

où

$$\mathbf{H}_j^{\text{cd}}(\mathbf{x}; \delta) = \mathbf{V}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{h}{\delta}) \quad \text{si} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}.$$

Pour tout $j \geq 0$, les termes $\mathbf{V}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3)$ admettent la décomposition suivante en composantes surfacique et normale

$$\mathbf{V}_j^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = \mathcal{V}_{\alpha,j}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) dy^\alpha + v_j^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) \mathbf{n}.$$

Pour tout $j \geq 0$, les termes v_j^{cd} , \mathbf{H}_j^{is} et $\mathcal{V}_j^{\text{cd}}$ sont déterminés successivement. Les termes $\mathcal{V}_{\alpha,j}^{\text{cd}}$ et v_j^{cd} ont la structure suivante

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_{\alpha,j}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) &= \left[A_{\alpha,j}^0(y_\beta) + Y_3 A_{\alpha,j}^1(y_\beta) + \cdots + Y_3^j A_{\alpha,j}^j(y_\beta) \right] e^{-\lambda Y_3} \\ v_j^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) &= \left[d_j^0(y_\beta) + Y_3 d_j^1(y_\beta) + \cdots + Y_3^{j-1} d_j^{j-1}(y_\beta) \right] e^{-\lambda Y_3}.\end{aligned}$$

On a explicité les deux premiers termes \mathbf{V}_0^{cd} et \mathbf{V}_1^{cd} . Pour tout $Y_3 \geq 0$, on a

$$\mathbf{V}_0^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}(y_\beta, 0) e^{-\lambda Y_3}$$

où $\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}} = (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n}$ est la composante tangentielle du terme \mathbf{H}_0^{is} , et

$$\mathcal{V}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = \left[(\mathbf{H}_{\tau,1}^{\text{is}})_\alpha(y_\beta, 0) + Y_3 \left(\mathcal{H}(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}})_\alpha - b_\alpha^\sigma(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}})_\sigma \right)(y_\beta, 0) \right] e^{-\lambda Y_3}$$

et

$$v_1^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = \lambda^{-1} D_\alpha(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}})^\alpha(y_\beta, 0) e^{-\lambda Y_3}.$$

Pour vérifier ces calculs, on a effectué un développement asymptotique du champ magnétique en résolvant les équations obtenues après élimination du champ électrique dans les équations de Maxwell. Les résultats des calculs obtenus par ces deux approches coïncident.

Validation du développement asymptotique (chapitres 1, 2 & 7)

On démontre au chapitre 7 la convergence des développements asymptotiques multi-échelles du champ électrique \mathbf{E}_δ et du champ magnétique \mathbf{H}_δ . Les restes $\mathbf{R}_{m,\delta}$ d'ordre $m \in \mathbb{N}$ du champ électrique sont définis en otant à \mathbf{E}_δ les $m + 1$ premiers termes du développement en champ électrique (6)-(7). A partir des estimations du chapitre 2, on démontre des estimations de ces restes en puissances de δ . Ces estimations valident le développement des champs électromagnétiques. Pour une donnée \mathbf{F} suffisamment régulière et sous l'hypothèse spectrale 2.24, on a :

$$\|\text{rot } \mathbf{R}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} + \|\text{div } \varepsilon(\delta) \mathbf{R}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{R}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\delta} \|\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}}\|_{0,\Omega_{\text{cd}}} \leq C_m \delta^{m-1}$$

où $C_m > 0$ est une constante indépendante de δ . De plus, on démontre les estimations optimales suivantes, pour les restrictions des restes à Ω_{cd} et Ω_{is}

$$\|\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}}\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_{\text{cd}})} \leq C_{m+2} \delta^{m+\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}}\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_{\text{is}})} \leq C_{m+2} \delta^{m+1}.$$

A partir d'une analyse fine du problème (1) relativement au petit paramètre δ , on démontre au chapitre 2 des estimations uniformes en δ de la solution \mathbf{E}_δ de ce problème.

Sous l'hypothèse spectrale 2.24, il existe une constante $\delta_0 > 0$ telle que pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$, la solution \mathbf{E}_δ du problème (1) associé à $\mathbf{F} \in \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega)$ vérifie l'estimation

$$(2) \quad \|\text{rot } \mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} + \|\text{div } \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\delta} \|\mathbf{E}_\delta^{\text{cd}}\|_{0,\Omega_{\text{cd}}} \leqslant C(\|\mathbf{F}\|_{0,\Omega} + \|\text{div } \mathbf{F}\|_{0,\Omega})$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de δ , voir le théorème 2.25. Ces résultats sont valables pour des sous-domaines Ω_{cd} et Ω_{is} polyédraux Lipschitziens. La démonstration de l'estimation (2) repose sur des estimations uniformes d'un problème scalaire sous-jacent du type

$$\text{div } a \nabla \varphi = f \quad \text{où} \quad a = 1 \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}} \quad \text{et} \quad a = 1 + \frac{i}{\delta^2} \quad \text{dans } \Omega_{\text{cd}}.$$

On démontre plus généralement au chapitre 1 des estimations uniformes pour le problème de transmission scalaire suivant

$$(3) \quad \begin{cases} \Delta \varphi^- & = f^- & \text{dans } \Omega_- \\ \rho \Delta \varphi^+ & = f^+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \varphi^- & = \varphi^+ & \text{sur } \Sigma \\ \rho \partial_{\mathbf{n}} \varphi^+ - \partial_{\mathbf{n}} \varphi^- & = (1 - \rho)g & \text{sur } \Sigma \\ \text{(b.c.)} & & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

posé dans le domaine Ω de la Figure 4, où $\partial_{\mathbf{n}}$ désigne la dérivée normale et les conditions aux bords (b.c.) sur $\partial\Omega$ sont les conditions de Neumann ou Dirichlet.

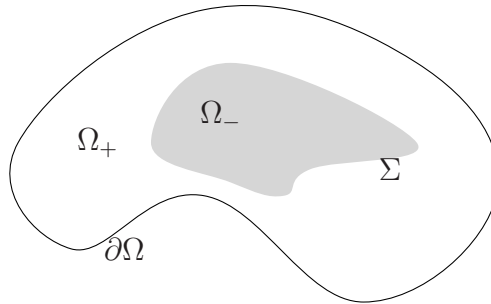


Figure 4 – Le domaine Ω

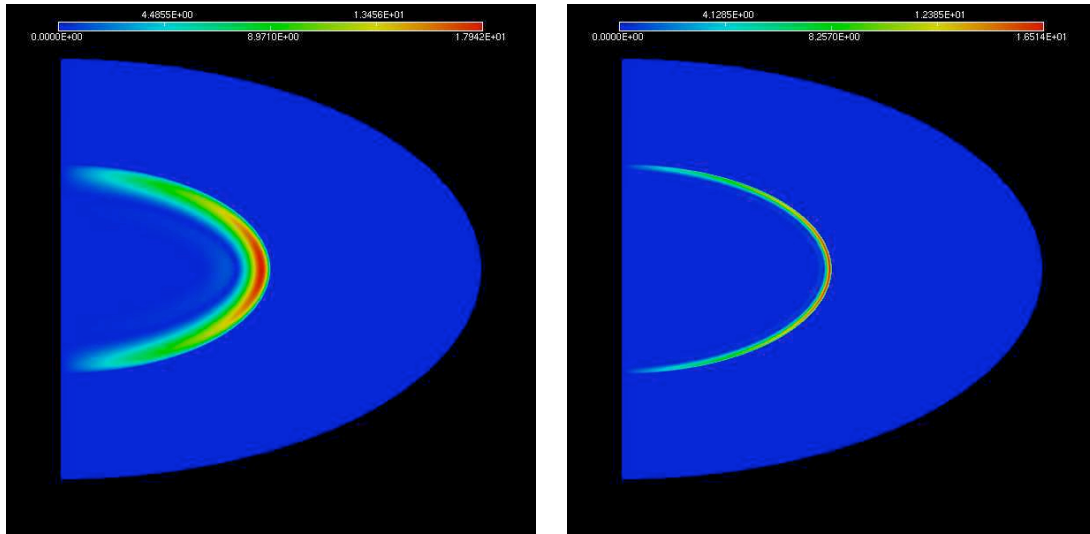
Pour tout $s \in (\frac{1}{2}, 1]$, si $f \in H^{s-1}(\Omega)$ et $g \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ sont de moyennes nulles, il existe des constantes $s_0 > \frac{1}{2}$ et $\rho_0 > 0$ telles que pour tout $\rho \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geqslant \rho_0\}$, le problème (3) admet une solution $\varphi_\rho \in \text{PH}^{s+1}(\Omega)$, l'espace des fonctions H^{s+1} par sous-domaines, si $s < s_0$ et satisfait l'estimation

$$(4) \quad \|\varphi_\rho^+\|_{s+1,\Omega_+} + \|\varphi_\rho^-\|_{s+1,\Omega_-} \leqslant C_{\rho_0,s}(\|f\|_{s-1,\Omega} + \|g\|_{s-\frac{1}{2},\Sigma})$$

où $C_{\rho_0,s} > 0$ est indépendante de ρ , f et g . L'estimation (4) est valable pour des sous-domaines Ω_- et Ω_+ polyédraux Lipschitziens.

Calculs éléments finis (chapitre 8)

On présente des simulations numériques du champ magnétique en géométrie axisymétrique (cylindrique, sphérique et sphéroïdale) réalisées grâce à la bibliothèque éléments finis MÉLINA, voir [45]. Pour une donnée axisymétrique et orthoradiale, le champ magnétique est orthoradial et on se ramène à un problème scalaire posé dans le demi-plan méridien, auquel on applique une méthode de discrétisation par éléments finis. Les calculs utilisent des éléments finis quadrangulaires de degré Q10 et une interpolation aux points de Gauss-Lobatto de degré 21. Les calculs numériques mettent en évidence la décroissance exponentielle du champ magnétique à la surface du conducteur ainsi que l'influence de la géométrie de l'interface sur la manifestation du phénomène de l'*effet de peau*, voir les figures ci-dessous où H_σ désigne la solution numérique calculée pour $\sigma \in \{5, 80\}$.



$|\text{Im } H_\sigma|$ pour $\sigma = 5 \text{ S.m}^{-1}$

$|\text{Im } H_\sigma|$ pour $\sigma = 80 \text{ S.m}^{-1}$

Dans un modèle unidimensionnel de l'*effet de peau* où le conducteur est modélisé par un demi-espace, l'épaisseur de peau caractéristique $\ell(\sigma)$ définie par

$$\ell(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}},$$

correspond à la distance à l'interface où l'amplitude de l'onde électromagnétique a diminué d'un taux fixe par rapport à son amplitude à l'interface. Les formules théoriques explicites du développement asymptotique mettent en évidence l'influence de la géométrie

de l'interface sur la manifestation du phénomène de l'*effet de peau*. Alors, on généralise le paramètre $\ell(\sigma)$ à notre modèle de l'*effet de peau* en configuration axisymétrique en définissant une *épaisseur de peau* $\mathcal{L}(\sigma)$ caractéristique et intrinsèque par la relation

$$\mathcal{L}(\sigma) = \frac{\ell(\sigma)}{1 - \mathcal{H} \ell(\sigma)}$$

pour σ assez grand où \mathcal{H} est la courbure moyenne de l'interface. Les calculs numériques de l'*effet de peau* dans les trois géométries étudiées sont cohérents avec cette nouvelle définition de l'*épaisseur de peau* $\mathcal{L}(\sigma)$.

Calculs de *conditions de transmission approchées* (chapitre 9)

Ce travail présenté dans la partie A ci-dessus est la reproduction d'un article écrit avec Clair Poignard sur le problème d'une *membrane mince*. On calcule des conditions de transmission sur le bord du cytoplasme équivalentes à la couche mince, voir la Figure 2. On adopte une approche géométrique basée sur un changement de variables adéquat dans la couche mince. On rappelle quelques notions de calcul différentiel afin d'obtenir un développement asymptotique de \mathbf{E}_ε . On démontre par ailleurs des estimations d'erreurs qui valident ce développement. On présente enfin en appendice le développement asymptotique à tout ordre. Soit \mathbf{E}^0 la solution du problème limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\delta \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} d\mathbf{E}^0 \right) - \tilde{q} \mathbf{E}^0 = \mathbf{J} \quad \text{dans } \mathcal{O}, \quad \mathbf{E}^0 \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}$$

où les fonctions $\tilde{\mu}$ et \tilde{q} sont définies par sous-domaines de la façon suivante :

$$\forall x \in \mathcal{O}, \quad \tilde{\mu}(x) = \begin{cases} \mu_c & \text{dans } \mathcal{O}_c \\ \mu_e & \text{dans } \mathcal{O} \setminus \overline{\mathcal{O}_c} \end{cases} \quad \text{et} \quad \tilde{q}(x) = \begin{cases} q_c & \text{dans } \mathcal{O}_c \\ q_e & \text{dans } \mathcal{O} \setminus \overline{\mathcal{O}_c} \end{cases}$$

Soit \mathcal{J} l'injection $\mathcal{J} : \Gamma \rightarrow \mathcal{O}$, et \mathcal{J}^* son application pull-back $\mathcal{J}^* : \Omega^1(\mathcal{O}) \rightarrow \Omega^1(\Gamma)$. On définit les 1 formes \mathbb{S} et \mathbb{T} sur Γ par

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= (q_m - q_e) \mathcal{J}^*(\mathbf{E}^0)|_{\Gamma^+} + \left(\frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_e} \right) \delta_\Gamma d_\Gamma (\mathcal{J}^*(\mathbf{E}^0))|_{\Gamma^+} \\ \mathbb{T} &= q_c \left(\frac{1}{q_m} - \frac{1}{q_e} \right) d \left(\text{int}(\mathbf{n}_\Gamma) \mathbf{E}^0|_{\Gamma^-} \right) + \frac{\mu_m - \mu_e}{\mu_c} \text{int}(\mathbf{n}_\Gamma) (d\mathbf{E}^0)|_{\Gamma^-} \end{aligned}$$

où $\text{int}(\mathbf{n}_\Gamma) \mathbf{E}^0|_{\Gamma^-}$ est le produit intérieur de la 1-forme $\mathbf{E}^0|_{\Gamma^-}$ avec le champ de vecteur \mathbf{n}_Γ . Soit \mathbf{E}^1 la 1-forme définie par

$$\delta d\mathbf{E}^1 - \tilde{\mu} \tilde{q} \mathbf{E}^1 = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}_c \cup \mathcal{O} \setminus \overline{\mathcal{O}_c}, \quad \mathbf{E}^1 \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\mathcal{O}$$

avec les conditions de transmissions suivantes sur Γ

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_e} \text{int}(\mathbf{n}_\Gamma) d\mathbf{E}^1|_{\Gamma^+} - \frac{1}{\mu_c} \text{int}(\mathbf{n}_\Gamma) d\mathbf{E}^1|_{\Gamma^-} &= \mathbb{S} \\ \mathbf{n}_\Gamma \times \mathbf{E}^1|_{\Gamma^+} - \mathbf{n}_\Gamma \times \mathbf{E}^1|_{\Gamma^-} &= \mathbf{n}_\Gamma \times \mathbb{T} \end{aligned}$$

Pour une donnée $\mathbf{J} \in H^3\Omega^1(\mathcal{O}_e^{d_0})$, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad \|\mathbf{E}_\varepsilon - (\mathbf{E}^0 + \varepsilon \mathbf{E}^1)\|_{H\Omega^1(\mathbf{d}, \delta, \mathcal{O}_e)} \leq C\varepsilon^2,$$

où C est une constante indépendante de ε ; de plus, pour tout domaine ϖ compact dans \mathcal{O}_e , il existe $\varepsilon_\varpi > 0$ tel que

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_\varpi), \quad \|\mathbf{E}_\varepsilon - (\mathbf{E}^0 + \varepsilon \mathbf{E}^1)\|_{H\Omega^1(\mathbf{d}, \delta, \varpi)} \leq C_\varpi \varepsilon^2$$

où $C_\varpi > 0$ est une constante indépendante de ε .

Tous les dessins dans cette thèse ont été réalisés à l'aide de `Fig4Tex`, un ensemble de macros `Tex`, voir [37].

Chapitre 1

Problème de transmission scalaire à paramètre

1.1 Introduction

Dans ce premier chapitre, on démontre des estimations a priori uniformes pour un problème de transmission scalaire. On considère un problème mathématique basé sur les équations de Laplace posé dans un domaine Ω composé de deux sous-domaines. Sur le bord de Ω , on impose les conditions de Dirichlet ou Neumann.

La solution du problème mathématique dépend d'un paramètre complexe ρ et on prouve des estimations a priori uniformes selon ρ lorsque $|\rho| \rightarrow \infty$. Ces estimations sont utiles au chapitre 2 par exemple, lorsqu'on étudie la partie gradient du champ électrique solution des équations de Maxwell associées à un problème de transmission dans des matériaux à fort contraste dans leurs conductivités.

Le plan de chapitre est le suivant. On introduit à la section 1.2 un problème scalaire avec interface et les conditions au bord de Dirichlet ou Neumann. On présente ensuite au paragraphe 1.3 une famille de problèmes à paramètres et on énonce le résultat principal. Dans la paragraphe 1.4, on prouve des estimations uniformes H^2 par sous-domaines pour ce problème, voir le théorème 1.3 pour un résultat précis. On démontre enfin des estimations uniformes pour une interface polyédrale au paragraphe 1.5, voir le théorème 1.8.

1.2 Un problème de transmission scalaire

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 , de frontière $\partial\Omega$. Soit $\Omega_- \subset\subset \Omega$ un sous-domaine de Ω et de frontière Σ . Dans les sections 1.2 à 1.4, on considère que Ω est un domaine régulier et que Σ est de classe C^∞ , alors que dans la section 1.5, on considère le cas où Ω_- et Ω sont des polyèdres curvilignes. On note Ω_+ le complémentaire de $\overline{\Omega_-}$ dans Ω ,

voir Figure 1.

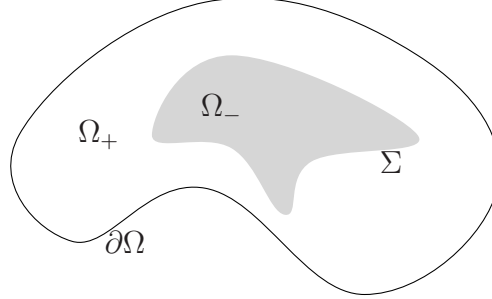


Figure 1 – Le domaine Ω

Tout au long de ce chapitre, nous utilisons les espaces de Sobolev H^s , $s \in \mathbb{R}$, basés sur L^2 pour des fonctions scalaires. Pour $\mathcal{O} \in \{\Omega_-, \Omega_+, \Omega\}$ et $s \in \mathbb{R}$, on note $\|\cdot\|_{s,\mathcal{O}}$ la norme dans $H^s(\mathcal{O})$. Pour tout $s > 0$, $\|\cdot\|_{s,\Gamma}$ désigne la norme dans $H^s(\Gamma)$ où $\Gamma \in \{\Sigma, \partial\Omega\}$. Soit a une fonction constante par morceaux dans Ω définie par :

$$a(\mathbf{x}) = \begin{cases} a_- & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_- \\ a_+ & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_+ . \end{cases} \quad (1.1)$$

On définit le saut de a à travers Σ par $[a]_\Sigma = a_+ - a_-$ et par φ^+ (φ^-) la restriction d'une fonction φ à Ω_+ (Ω_-).

On introduit l'espace fonctionnel

$$V = \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega_-} \varphi^- \, d\mathbf{x} = 0\} \quad (1.2)$$

lorsque l'on impose les conditions aux bords de Neumann sur $\partial\Omega$.

On choisit l'espace fonctionnel

$$V = H_0^1(\Omega) \quad (1.3)$$

pour les conditions aux bords de Dirichlet sur $\partial\Omega$.

Dans les deux cas (Neumann et Dirichlet) le problème s'écrit : trouver $\varphi \in V$ tel que

$$\begin{aligned} \forall \psi \in V, \quad a_+ \int_{\Omega_+} \nabla \varphi^+ \cdot \overline{\nabla \psi^+} \, d\mathbf{x} + a_- \int_{\Omega_-} \nabla \varphi^- \cdot \overline{\nabla \psi^-} \, d\mathbf{x} = \\ - \int_{\Omega} f \bar{\psi} \, d\mathbf{x} + [a]_\Sigma \int_{\Sigma} g \bar{\psi} \, ds, \end{aligned} \quad (1.4)$$

avec des données $f \in L^2(\Omega)$ et $g \in L^2(\Sigma)$.

Le problème de transmission (1.4) est elliptique. Par régularité elliptique, φ a d'autant plus de régularité sur les sous-domaines que les données sont régulières, voir [1]. Dans la suite, on suppose que les données f et g satisfont les hypothèses suivantes

$$f \in L^2(\Omega) \quad \text{et} \quad g \in H^{\frac{1}{2}}(\Sigma). \quad (1.5)$$

Définition 1.1 Soit $\text{PH}^2(\Omega)$ l'espace des fonctions H^2 par sous-domaines, défini par

$$\text{PH}^2(\Omega) = \{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \varphi^+ \in H^2(\Omega_+) \quad \text{et} \quad \varphi^- \in H^2(\Omega_-)\} \quad (1.6)$$

muni de la norme

$$\|\varphi\|_{\text{PH}^2(\Omega)}^2 = \|\varphi^-\|_{2,\Omega_-}^2 + \|\varphi^+\|_{2,\Omega_+}^2. \quad (1.7)$$

Le résultat suivant est valable pour le problème (1.4) avec les conditions aux bords de Dirichlet ou Neumann.

Proposition 1.2 Soit φ une solution du problème (1.4) pour des données f et g satisfaisant les hypothèses (1.5). Alors

$$\varphi \in \text{PH}^2(\Omega) \quad (1.8)$$

et φ satisfait la formulation forte du problème (1.4)

$$\begin{cases} a_- \Delta \varphi^- & = f^- & \text{dans } \Omega_- \\ a_+ \Delta \varphi^+ & = f^+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \varphi^- & = \varphi^+ & \text{sur } \Sigma \\ a_+ \partial_n \varphi^+ - a_- \partial_n \varphi^- & = [a]_\Sigma g & \text{sur } \Sigma \\ (b.c.) & & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.9)$$

où ∂_n désigne la dérivée normale (entrante pour Ω_- , sortante pour Ω_+). Les conditions aux bords (b.c.) sur $\partial\Omega$ sont les conditions de Neumann ou Dirichlet.

1.3 Une famille de problèmes à paramètre

On introduit maintenant un paramètre $\rho \in \mathbb{C}$ dans le problème (1.4). Pour $a_+ = 1$ et $a_- = \rho$, on obtient une famille de problèmes dépendant du paramètre ρ : trouver $\varphi_\rho \in V$ tel que

$$\begin{aligned} \forall \psi \in V, \quad & \int_{\Omega_+} \nabla \varphi_\rho^+ \cdot \overline{\nabla \psi^+} \, d\mathbf{x} + \rho \int_{\Omega_-} \nabla \varphi_\rho^- \cdot \overline{\nabla \psi^-} \, d\mathbf{x} = \\ & - \int_{\Omega} f \bar{\psi} \, d\mathbf{x} + (1 - \rho) \int_{\Sigma} g \bar{\psi} \, ds, \end{aligned} \quad (\mathbf{P}_\rho)$$

où les données f et g sont fixées, indépendantes de ρ et vérifient les hypothèses (1.5). Dans la suite de ce chapitre, on construit une application

$$\rho \mapsto \varphi_\rho$$

associant à ρ une solution du problème (\mathbf{P}_ρ) et on étudie son comportement lorsque $|\rho| \rightarrow +\infty$. On effectue des hypothèses simplificatrices sur les données du problème (\mathbf{P}_ρ) . Pour les données f et g associées au problème de Neumann, respectivement au problème de Dirichlet, on suppose :

$$\int_{\Omega} f \, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Sigma} g \, ds = 0, \quad \text{respectivement} \quad \int_{\Sigma} g \, ds = 0. \quad (1.10)$$

Le but de ce chapitre est de démontrer des estimations a priori dans $\text{PH}^2(\Omega)$ uniformes selon ρ pour une solution $\varphi_\rho \in H^1(\Omega)$ de (\mathbf{P}_ρ) . Le résultat principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème 1.3 *Sous les hypothèses (1.5) et (1.10), il existe une constante $\rho_0 > 0$ telle que pour tout $\rho \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq \rho_0\}$, le problème (\mathbf{P}_ρ) admet une solution $\varphi_\rho \in V$, qui de plus appartient à $\text{PH}^2(\Omega)$ et satisfait l'estimation*

$$\|\varphi_\rho\|_{\text{PH}^2(\Omega)} \leq C_{\rho_0} (\|f\|_{0,\Omega} + \|g\|_{\frac{1}{2},\Sigma}) \quad (1.11)$$

où $C_{\rho_0} > 0$ est indépendante de ρ , f et g .

Remarque 1.4 *Sous l'hypothèse supplémentaire que $\rho \in \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Re } z \geq \xi_0\}$, avec $\xi_0 > 0$, un argument de coercivité permet de prouver que la solution φ_ρ du problème (\mathbf{P}_ρ) est unique.*

Remarque 1.5 *L'estimation (1.11) fait intervenir la norme de $\|g\|_{\frac{1}{2},\Sigma}$ mais elle est indépendante de $[a]_\Sigma = 1 - \rho$, ce qui est à comparer avec l'équation (1.9).*

On démontre le théorème 1.3 au paragraphe suivant. La technique utilisée est un Ansatz en série de φ_ρ selon les puissances de ρ^{-1} . On prouve que cette série converge normalement dans $\text{PH}^2(\Omega)$ vers une solution du problème (\mathbf{P}_ρ) . On en déduit l'estimation (1.11). Puisque les développements en série diffèrent selon les conditions aux bords, on traite séparément le cas Neumann dans la sous-section 1.4.1 et le cas Dirichlet dans la sous-section 1.4.2.

1.4 Développement en série

Vu la présence des termes en ρ dans le problème (\mathbf{P}_ρ) , on effectue un Ansatz série en puissance de ρ^{-1} pour φ_ρ :

$$\varphi_\rho = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^+ \rho^{-n} & \text{dans } \Omega_+ \\ \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n^- \rho^{-n} & \text{dans } \Omega_- . \end{cases} \quad (1.12)$$

On va démontrer que cette série converge en norme dans l'espace $\text{PH}^2(\Omega)$ vers une solution du problème (\mathbf{P}_ρ) . On traite tout d'abord le problème de Neumann associé à (\mathbf{P}_ρ) .

1.4.1 Condition au bord de Neumann

On substitue l'Ansatz (1.12) dans (\mathbf{P}_ρ) puis on identifie les termes selon les puissances de ρ^{-1} . On obtient une famille de problèmes indépendants de ρ , couplés par leurs conditions sur Σ :

$$\begin{cases} \Delta \varphi_0^- & = 0 & \text{dans } \Omega_- \\ \partial_{\mathbf{n}} \varphi_0^- & = g & \text{sur } \Sigma \\ \int_{\Omega_-} \varphi_0^- d\mathbf{x} & = 0 \end{cases} \quad (1.13)$$

et

$$\begin{cases} \Delta \varphi_0^+ & = f^+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \varphi_0^+ & = \varphi_0^- & \text{sur } \Sigma \\ \partial_{\mathbf{n}} \varphi_0^+ & = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.14)$$

et pour $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{cases} \Delta \varphi_k^- & = \delta_k^1 f^- & \text{dans } \Omega_- \\ \partial_{\mathbf{n}} \varphi_k^- & = -\delta_k^1 g + \partial_{\mathbf{n}} \varphi_{k-1}^+ & \text{sur } \Sigma \\ \int_{\Omega_-} \varphi_k^- d\mathbf{x} & = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

et

$$\begin{cases} \Delta \varphi_k^+ & = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \varphi_k^+ & = \varphi_k^- & \text{sur } \Sigma \\ \partial_{\mathbf{n}} \varphi_k^+ & = 0 & \text{et } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.16)$$

Ici δ_k^1 désigne le symbole de Kronecker. Noter que dans (1.13) et (1.15) on a adjoint la condition d'intégrale nulle sur la solution, ce qui d'une part assure l'unicité et d'autre part est cohérent avec la condition présente dans la définition (1.2) de V .

On construit successivement chaque terme φ_n^- et φ_n^+ , en commençant par φ_0^- et φ_0^+ . Supposons que les suites $\{\varphi_k^-\}_{k=0}^{n-1}$ et $\{\varphi_k^+\}_{k=0}^{n-1}$ sont connues. Alors, le problème (1.15) définit un unique φ_n^- dont la trace sur Σ est insérée dans (1.16) comme une donnée de Dirichlet afin de déterminer la partie externe φ_n^+ .

Discussion des problèmes élémentaires

Le problème de Neumann (1.13) admet une solution $\varphi_0^- \in H^1(\Omega_-)$, unique sous la condition $\int_{\Omega_-} \varphi_0^- d\mathbf{x} = 0$. On rappelle qu'on a la condition de compatibilité $\int_{\Sigma} g ds = 0$. De plus, par régularité elliptique, $\varphi_0^- \in H^2(\Omega_-)$ et il existe une constante $C_N > 0$ indépendante de ρ tel que

$$\|\varphi_0^-\|_{2,\Omega_-} \leq C_N \|g\|_{\frac{1}{2},\Sigma}. \quad (1.17)$$

On s'intéresse à φ_0^+ dans (1.14). Le problème (1.14) a une unique solution $\varphi_0^+ \in H^1(\Omega_+)$. De plus, par régularité elliptique et puisque $\varphi_0^- \in H^2(\Omega_-)$, $\varphi_0^+ \in H^2(\Omega_+)$ et il existe une constante $C_{DN} > 0$ indépendante de ρ tel que

$$\|\varphi_0^+\|_{2,\Omega_+} \leq C_{DN} (\|\varphi_0^-\|_{2,\Omega_-} + \|f^+\|_{0,\Omega_+}). \quad (1.18)$$

On continue ensuite avec les problèmes (1.15) et (1.16) de façon similaire, le seul point à discuter étant la condition de compatibilité dans le problème de Neumann (1.15).

Lemme 1.6 *Le problème de Neumann (1.15) est compatible.*

PREUVE. Pour $k = 1$, on doit prouver que

$$\int_{\Omega_-} f^- d\mathbf{x} + \int_{\Sigma} (-g + \partial_{\mathbf{n}} \varphi_0^+) ds = 0. \quad (1.19)$$

D'après (1.14),

$$\begin{cases} \Delta \varphi_0^+ = f^+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_{\mathbf{n}} \varphi_0^+ = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En intégrant par partie, il vient

$$\int_{\Sigma} \partial_{\mathbf{n}} \varphi_0^+ ds = \int_{\Omega_+} f^+ d\mathbf{x}.$$

Sous les hypothèses (1.10), on en déduit la condition de compatibilité (1.19). Pour $k \geq 2$, on suppose que le terme φ_{k-1}^+ est construit. On doit montrer que

$$0 = \int_{\Sigma} \partial_{\mathbf{n}} \varphi_{k-1}^+ ds. \quad (1.20)$$

Or, d'après (1.16),

$$\begin{cases} \Delta \varphi_{k-1}^+ = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \partial_{\mathbf{n}} \varphi_{k-1}^+ = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En intégrant par partie dans Ω_+ , on en déduit (1.20). ■

Par conséquent, le problème de Neumann (1.15) admet une solution $\varphi_k^- \in H^1(\Omega_-)$, unique sous la condition $\int_{\Omega_-} \varphi_k^- d\mathbf{x} = 0$. De plus, $\varphi_k^- \in H^2(\Omega_-)$ et

$$\|\varphi_k^-\|_{2,\Omega_-} \leq C_N [\delta_k^1 (\|f^-\|_{0,\Omega_-} + \|g\|_{\frac{1}{2},\Sigma}) + \|\partial_{\mathbf{n}} \varphi_{k-1}^+\|_{\frac{1}{2},\Sigma}]. \quad (1.21)$$

Enfin, le problème (1.16) a une solution unique $\varphi_k^+ \in H^1(\Omega_+)$ et on a l'estimation

$$\|\varphi_k^+\|_{2,\Omega_+} \leq C_{DN} \|\varphi_k^-\|_{2,\Omega_-}. \quad (1.22)$$

On démontre maintenant la convergence normale dans $\text{PH}^2(\Omega)$ de la série (1.12) lorsque $|\rho|$ est assez grand.

Convergence normale de la série

Soit $C_1 > 0$ la constante de continuité de l'opérateur trace Neumann $\gamma_{1,\Sigma}$ défini par

$$\begin{aligned} \gamma_{1,\Sigma} : H^2(\mathcal{O}) &\rightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \\ \varphi &\mapsto \partial_{\mathbf{n}} \varphi \end{aligned}$$

où $\mathcal{O} \in \{\Omega_-, \Omega_+\}$. Ainsi, pour tout $\varphi \in H^2(\mathcal{O})$, on a $\|\gamma_{1,\Sigma}(\varphi)\|_{\frac{1}{2},\Sigma} \leq C_1 \|\varphi\|_{2,\mathcal{O}}$. On pose $\alpha = C_N C_1 C_{DN}$, où C_N et C_{DN} sont les constantes respectives des estimations (1.17) et (1.18). D'après (1.21) et (1.22), on démontre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\begin{cases} \|\varphi_n^-\|_{2,\Omega_-} \leq \alpha^{n-1} \|\varphi_1^-\|_{2,\Omega_-} \\ \|\varphi_n^+\|_{2,\Omega_+} \leq C_{DN} \alpha^{n-1} \|\varphi_1^-\|_{2,\Omega_-}. \end{cases} \quad (1.23)$$

Alors, pour tout $\rho \in \mathbb{C}$ tel que $|\rho|^{-1} \alpha < 1$, les séries de termes généraux $\rho^{-n} \varphi_n^+$ et $\rho^{-n} \varphi_n^-$ convergent normalement respectivement dans $H^2(\Omega_+)$ et $H^2(\Omega_-)$.

On démontre maintenant le théorème 1.3 pour les conditions au bord de Neumann.

Démonstration du Théorème 1.3

On démontre tout d'abord l'estimation (1.11) pour φ_ρ défini par (1.12). Soit $\rho_0 > 0$ tel que $\rho_0^{-1}\alpha < 1$, où $\alpha = C_N C_1 C_{DN}$. Soit $\rho \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq \rho_0\}$ et φ_ρ la série de terme général $\rho^{-n}\varphi_n$. D'après (1.23), la convergence normale de φ_ρ dans $\text{PH}^2(\Omega)$ est géométrique de raison inférieure à $\rho_0^{-1}\alpha$. Ainsi

$$\begin{cases} \|\varphi_\rho^+\|_{2,\Omega_+} \leq C_{DN} \frac{1}{1-\rho_0^{-1}\alpha} \rho_0^{-1} \|\varphi_1^-\|_{2,\Omega_-} + \|\varphi_0^+\|_{2,\Omega_+} \\ \|\varphi_\rho^-\|_{2,\Omega_-} \leq \rho_0^{-1} \frac{1}{1-\rho_0^{-1}\alpha} \|\varphi_1^-\|_{2,\Omega_-} + \|\varphi_0^-\|_{2,\Omega_-} . \end{cases} \quad (1.24)$$

D'après (1.21),

$$\|\varphi_1^-\|_{2,\Omega_-} \leq C_N [(\|f^-\|_{0,\Omega_-} + \|g\|_{\frac{1}{2},\Sigma}) + \|\partial_{\mathbf{n}}\varphi_0^+\|_{\frac{1}{2},\Sigma}] . \quad (1.25)$$

Avec (1.17) et (1.18), on en déduit l'estimation uniforme (1.11). On démontre maintenant que $\varphi_\rho \in V$. Par construction, φ_ρ est solution du problème (1.9) avec $(a_- = \rho, a_+ = 1)$. En particulier $\varphi_\rho \in H^1(\Omega)$. Enfin φ_ρ^- est d'intégrale nulle sur Ω_- car tous les φ_n^- le sont.

On traite dans le paragraphe suivant le problème de Dirichlet associé à (\mathbf{P}_ρ) .

1.4.2 Condition au bord de Dirichlet

Ici $V = H_0^1(\Omega)$. Lorsqu'on considère la condition au bord $\varphi_\rho = 0$ sur $\partial\Omega$ dans le problème (\mathbf{P}_ρ) , une construction similaire peut être effectuée. Cependant on traite les conditions de compatibilité dans Ω_- avec une attention particulière. Partant du même Ansatz en série (1.12), il vient

$$\begin{cases} \Delta\varphi_0^- &= 0 & \text{dans } \Omega_- \\ \partial_{\mathbf{n}}\varphi_0^- &= g & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (1.26)$$

et

$$\begin{cases} \Delta\varphi_0^+ &= f^+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \varphi_0^+ &= \varphi_0^- & \text{sur } \Sigma \\ \varphi_0^+ &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.27)$$

et pour $k = 1, 2, \dots$

$$\begin{cases} \Delta\varphi_k^- &= \delta_k^1 f^- & \text{dans } \Omega_- \\ \partial_{\mathbf{n}}\varphi_k^- &= -\delta_k^1 g + \partial_{\mathbf{n}}\varphi_{k-1}^+ & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (1.28)$$

et

$$\begin{cases} \Delta \varphi_k^+ = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \varphi_k^+ = \varphi_k^- & \text{sur } \Sigma \\ \varphi_k^+ = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.29)$$

Noter qu'ici, on n'a pas adjoint la condition d'intégrale nulle dans (1.26) et (1.28). Comme on va le voir, l'ajustement des constantes est nécessaire à la résolubilité de la série de problèmes (1.26)-(1.29).

Discussion des problèmes élémentaires.

Soit $\tilde{\varphi}_0^- \in H^2(\Omega_-)$ la solution du problème de Neumann (1.26) sous la condition $\int_{\Omega_-} \tilde{\varphi}_0^- d\mathbf{x} = 0$. Ici, on garde encore une constante c_0 à ajuster. Alors, $\varphi_0^- = \tilde{\varphi}_0^- + c_0$ est déterminé dès que c_0 est fixé et (1.27) admet une unique solution $\varphi_0^+ \in H^2(\Omega_+)$.

On s'intéresse à (1.28) pour $k = 1$, qui est un problème de Neumann avec la condition de compatibilité

$$\int_{\Omega_-} f^- d\mathbf{x} + \int_{\Sigma} (-g + \partial_{\mathbf{n}} \varphi_0^+) ds = 0$$

et puisque $\int_{\Sigma} g ds = 0$, elle s'écrit

$$\int_{\Sigma} \partial_{\mathbf{n}} \varphi_0^+ ds = - \int_{\Omega_-} f^- d\mathbf{x}. \quad (1.30)$$

On choisit maintenant $\varphi_0^+ = \tilde{\varphi}_0^+ + c_0 \psi$ où

$$\begin{cases} \Delta \tilde{\varphi}_0^+ = f^+ & \text{dans } \Omega_+ \\ \tilde{\varphi}_0^+ = \tilde{\varphi}_0^- & \text{sur } \Sigma \\ \tilde{\varphi}_0^+ = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.31)$$

et

$$\begin{cases} \Delta \psi = 0 & \text{dans } \Omega_+ \\ \psi = 1 & \text{sur } \Sigma \\ \psi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.32)$$

avec

$$c_0 = - \left(\int_{\Sigma} \partial_{\mathbf{n}} \tilde{\varphi}_0^+ ds + \int_{\Omega_-} f^- d\mathbf{x} \right) / \int_{\Sigma} \partial_{\mathbf{n}} \psi ds. \quad (1.33)$$

Par régularité elliptique $\tilde{\varphi}_0^+ \in H^2(\Omega_+)$ est uniquement déterminé par (1.31), ψ par (1.32), et c_0 par (1.33) puisque $\int_{\Sigma} \partial_{\mathbf{n}} \psi ds \neq 0$ (principe du maximum).

Ainsi on a entièrement déterminé $\varphi_0^- = \tilde{\varphi}_0^- + c_0 \in H^2(\Omega_-)$ et $\varphi_0^+ = \tilde{\varphi}_0^+ + c_0 \psi \in H^2(\Omega_+)$.

De plus le choix de c_0 donne la condition de compatibilité (1.30) du problème (1.28) pour $k = 1$.

A nouveau on prend $\varphi_1^- = \tilde{\varphi}_1^- + c_1 \in H^2(\Omega_-)$, avec $\tilde{\varphi}_1^-$ uniquement déterminé par (1.28) avec $k = 1$ sous la condition $\int_{\Omega_-} \tilde{\varphi}_1^- d\mathbf{x} = 0$. Alors $\varphi_1^+ = \tilde{\varphi}_1^+ + c_1\psi \in H^2(\Omega_+)$, avec $\tilde{\varphi}_1^+$ uniquement déterminé par (1.29) avec $\tilde{\varphi}_1^+ = \tilde{\varphi}_1^-$ sur Σ et

$$c_1 = - \int_{\Sigma} \partial_{\mathbf{n}} \tilde{\varphi}_1^+ ds / \int_{\Sigma} \partial_{\mathbf{n}} \psi ds. \quad (1.34)$$

On continue de façon itérative le processus de construction des suites $\{\varphi_k^-\}_{k \geq 0} \subset H^2(\Omega_-)$ et $\{\varphi_k^+\}_{k \geq 0} \subset H^2(\Omega_+)$. De la même façon qu'au paragraphe précédent, on démontre que les séries de termes généraux $\rho^{-n}\varphi_n^+$ et $\rho^{-n}\varphi_n^-$ convergent normalement respectivement dans $H^2(\Omega_+)$ et $H^2(\Omega_-)$ vers une solution du problème de Dirichlet associé à (\mathbf{P}_ρ) . Finalement, on obtient le théorème 1.3 pour les conditions au bord de Dirichlet.

Remarque 1.7 Lorsque $a_- = 1$ dans Ω_- et $a_+ = \rho$ dans Ω_+ , tous les problèmes élémentaires sont bien posés, y compris pour le problème de Dirichlet. On démontre à nouveau des estimations a priori dans $\text{PH}^2(\Omega)$ uniformes selon ρ pour toute solution $\varphi_\rho \in H^1(\Omega)$ du problème (\mathbf{P}_ρ) , avec des données vérifiant les hypothèses (1.5) et (1.10).

1.5 Cas d'une interface polyédrale

Dans ce paragraphe, on suppose que Ω_- et Ω sont des polyèdres curvilignes, voir [18]. On s'intéresse encore à l'existence et au comportement d'une solution φ_ρ au problème (\mathbf{P}_ρ) lorsque $|\rho| \rightarrow +\infty$. Dans cette section, on prouve un résultat similaire à celui du théorème 1.3, mais avec une estimation plus faible. On rappelle que les données f et g du problème (\mathbf{P}_ρ) vérifient l'hypothèse (1.10), voir la section 1.2. Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Théorème 1.8 Soit $s \in (\frac{1}{2}, 1]$. On suppose que $f \in H^{s-1}(\Omega)$ et $g \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma)$. Sous l'hypothèse (1.10), il existe des constantes $s_0 > \frac{1}{2}$ et $\rho_0 > 0$ telles que pour tout $\rho \in \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \geq \rho_0\}$, le problème (\mathbf{P}_ρ) admet une solution $\varphi_\rho \in V$, qui de plus appartient à $\text{PH}^{s+1}(\Omega)$ si $s < s_0$ et satisfait l'estimation

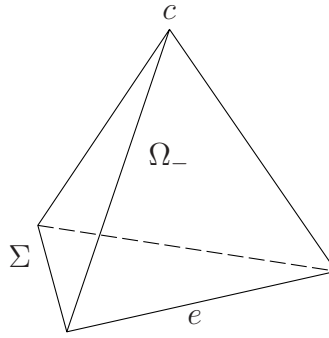
$$\|\varphi_\rho^+\|_{s+1, \Omega_+} + \|\varphi_\rho^-\|_{s+1, \Omega_-} \leq C_{\rho_0, s} (\|f\|_{s-1, \Omega} + \|g\|_{s-\frac{1}{2}, \Sigma}) \quad (1.35)$$

où $C_{\rho_0, s} > 0$ est indépendante de ρ , f et g .

Remarque 1.9 La constante s_0 dépend de la géométrie des domaines Ω_- et Ω_+ .

De la même façon que lorsque l'interface Σ est régulière, on démontre le théorème 1.8 en effectuant un développement en série, voir (1.12). Les problèmes élémentaires associés aux termes du développement asymptotique φ_k^+ et φ_k^- sont bien posés dans H^1 .

Cependant, dû à la présence d'arêtes et de coins sur Σ , on n'a plus d'estimations H^2 par sous domaine. Néanmoins, on démontre des estimations plus faibles au paragraphe 1.5.1 pour chacun des problèmes élémentaires. La démonstration repose sur des résultats de régularité elliptique du type $H^{s-1} \rightarrow H^{s+1}$ où s dépend des angles diédraux de Ω_- et Ω_+ au voisinage de chacune de ses arêtes e ainsi que des coins c sur Σ , voir la Figure 3 pour un polyèdre droit.

Figure 3 – Le domaine Ω_-

Les résultats utilisés sont issus de [17] et [18] et donnent une réponse à la question de régularité suivante, voir [17] : étant donnée une solution u d'un problème aux limites homogène de Dirichlet, Neumann ou Mixte associé ici à l'opérateur de Laplace

$$Q(s, 2) \quad \text{si } f \in H^{s-1}(\mathcal{O}), \quad \text{a-t-on } u \in H^{s+1}(\mathcal{O}) ? \quad (1.36)$$

où $\mathcal{O} \in \{\Omega_-, \Omega_+\}$, et f est la donnée du problème. On en déduit l'estimation uniforme (1.35) pour toute solution φ_ρ du problème (P_ρ) , voir théorème 1.8. Pour simplifier, on traite simplement le problème de Neumann associé à (P_ρ) , le problème de Dirichlet s'étudiant de façon similaire.

1.5.1 Régularité elliptique

On commence par rappeler des résultats de régularité et estimations pour des problèmes généralisés associés à (1.13) et (1.14). Pour tout $s > \frac{1}{2}$, on considère les problèmes suivants

$$\begin{cases} \Delta \varphi^- & = F & \text{dans } \Omega_- \\ \partial_{\mathbf{n}} \varphi^- & = G & \text{sur } \Sigma \\ \int_{\Omega_-} \varphi^- \, d\mathbf{x} & = 0 \end{cases} \quad (1.37)$$

où $F \in H^{s-1}(\Omega_-)$ et $G \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma)$, ainsi que

$$\begin{cases} \Delta \varphi^+ &= F & \text{dans } \Omega_+ \\ \varphi^+ &= H & \text{sur } \Sigma \\ \partial_{\mathbf{n}} \varphi^+ &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1.38)$$

où $F \in H^{s-1}(\Omega_+)$ et $H \in H^{s+\frac{1}{2}}(\Sigma)$.

Proposition 1.10 *Soit $s \in (\frac{1}{2}, 1]$. Alors, il existe $s_0^- > \frac{1}{2}$ tel que si $s < s_0^-$, la solution $\varphi^- \in H^1(\Omega_-)$ de (1.37) associée à $(F, G) \in H^{s-1}(\Omega_-) \times H^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma)$ vérifie $\varphi^- \in H^{s+1}(\Omega_-)$. De plus il existe une constante $c_N > 0$ indépendante de ρ et s tel que*

$$\|\varphi^-\|_{s+1, \Omega_-} \leq c_N (\|F\|_{s-1, \Omega_-} + \|G\|_{s-\frac{1}{2}, \Sigma}). \quad (1.39)$$

Proposition 1.11 *Soit $s \in (\frac{1}{2}, 1]$. Alors, il existe $s_0^+ > \frac{1}{2}$ tel que si $s < s_0^+$, la solution $\varphi^+ \in H^1(\Omega_+)$ de (1.38) associée à $(F, H) \in H^{s-1}(\Omega_+) \times H^{s+\frac{1}{2}}(\Sigma)$ vérifie $\varphi^+ \in H^{s+1}(\Omega_+)$. De plus, il existe une constante $c_{DN} > 0$ indépendante de ρ et s tel que*

$$\|\varphi^+\|_{s+1, \Omega_+} \leq c_{DN} (\|F\|_{s-1, \Omega_+} + \|H\|_{s+\frac{1}{2}, \Sigma}). \quad (1.40)$$

Remarque 1.12 (i) Les constantes s_0^- et s_0^+ dépendent de la géométrie des domaines Ω_- et Ω_+ , voir [18].

(ii) Les frontières Dirichlet et Neumann associées au problème (1.38) sont disjointes, ce qui assure que $s_0^+ > \frac{1}{2}$. Dans le cas où ces frontières ne seraient pas disjointes, on aurait simplement $s_0^+ > \frac{1}{4}$.

Démonstration du Théorème 1.8

PREUVE. Soit $s \in (\frac{1}{2}, 1]$. D'après la proposition 1.10, appliquée à $(F = 0, G = g)$, si $s < s_0^-$ alors la solution $\varphi_0^- \in H^1(\Omega_-)$ de (1.13) vérifie $\varphi_0^- \in H^{s+1}(\Omega_-)$ et on a

$$\|\varphi_0^-\|_{s+1, \Omega_-} \leq c_N \|g\|_{s-\frac{1}{2}, \Sigma}. \quad (1.41)$$

On fixe $s_0 = \min(s_0^+, s_0^-)$. Pour $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ et $s < s_0$, d'après la proposition 1.11 appliquée à $(F = f^+, H = \gamma_{0, \Sigma} \varphi_0^-)$, la solution $\varphi_0^+ \in H^1(\Omega_+)$ de (1.14) vérifie $\varphi_0^+ \in H^{s+1}(\Omega_+)$ et on a

$$\|\varphi_0^+\|_{s+1, \Omega_+} \leq c_{DN} (\|\varphi_0^-\|_{s+1, \Omega_-} + \|f^+\|_{s-1, \Omega_+}). \quad (1.42)$$

On démontre par une récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, les estimations suivantes pour les termes φ_k^- et φ_k^+ . Pour $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ et si $s < s_0$, les solutions $\varphi_k^- \in H^1(\Omega_-)$ de (1.15), respectivement

$\varphi_k^+ \in H^1(\Omega_+)$ de (1.16), vérifient $\varphi_k^- \in H^{s+1}(\Omega_-)$, respectivement $\varphi_k^+ \in H^{s+1}(\Omega_+)$, et on a les estimations suivantes

$$\|\varphi_k^-\|_{s+1,\Omega_-} \leq c_N [\delta_k^1 (\|f^-\|_{s-1,\Omega_-} + \|g\|_{s-\frac{1}{2},\Sigma}) + \|\partial_n \varphi_{k-1}^+\|_{s-\frac{1}{2},\Sigma}], \quad (1.43)$$

$$\|\varphi_k^+\|_{s+1,\Omega_+} \leq c_{DN} \|\varphi_k^-\|_{s+1,\Omega_-}. \quad (1.44)$$

Pour démontrer l'estimation uniforme (1.35), on utilise enfin l'inégalité de trace suivante : il existe une constante $c_1 > 0$ telle que pour tout $\varphi^+ \in H^{s+1}(\Omega_+)$ où $s > -\frac{1}{2}$

$$\|\partial_n \varphi^+\|_{s-\frac{1}{2},\Sigma} \leq c_1 \|\varphi^+\|_{s+1,\Omega_+}. \quad (1.45)$$

On pose $\beta = c_N c_1 c_{DN}$. Alors, similairement à (1.23), pour tout $s \in (\frac{1}{2}, 1]$ tel que $s < s_0$ il vient d'après (1.43) et (1.44)

$$\begin{cases} \|\varphi_n^-\|_{s+1,\Omega_-} \leq \beta^{n-1} \|\varphi_1^-\|_{s+1,\Omega_-} \\ \|\varphi_n^+\|_{s+1,\Omega_+} \leq c_{DN} \beta^{n-1} \|\varphi_1^-\|_{s+1,\Omega_-} \end{cases} \quad (1.46)$$

La suite de la démonstration est similaire à celle du théorème 1.3 et est une conséquence des estimations (1.41), (1.42). ■

1.5.2 Cas d'une interface cylindrique

Dans cette sous-section, on suppose que Ω_- est un cylindre et Ω est un domaine régulier. On note e_1 et e_2 les deux arêtes circulaires de Ω_- . On suppose que les angles diédraux de Ω_- , respectivement Ω_+ , au voisinage de e_1 et e_2 valent $\omega_- = \frac{\pi}{2}$, respectivement $\omega_+ = \frac{3\pi}{2}$, voir Figure 2 ci-dessous.

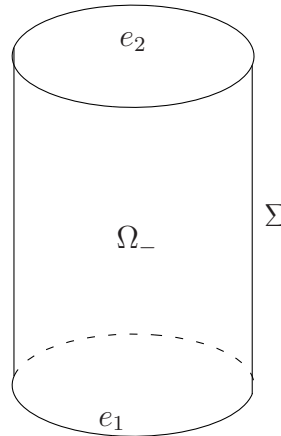


Figure 2 – Le domaine Ω_-

On peut donner des estimations améliorées des constantes s_0^- et s_0^+ introduites aux propositions 1.10 et 1.11 du paragraphe 1.5.1. Précisément, on a $s_0^- = \min(\frac{5}{2}, \frac{\pi}{\omega_-})$ et $s_0^+ = \min(\frac{5}{2}, \frac{\pi}{\omega_+})$, voir [18]. Donc $s_0^- = 2$ et $s_0^+ = \frac{3}{2}$.

Chapitre 2

Problème de transmission électromagnétique à petit paramètre

2.1 Introduction

Dans ce second chapitre, on démontre des estimations a priori uniformes pour un problème de transmission électromagnétique dans des matériaux à forts contrastes dans leurs conductivités. On considère un problème mathématique basé sur les équations de Maxwell posées dans un domaine composé de deux sous-domaines, l'un représentant un matériau isolant et l'autre un matériau fortement conducteur. La frontière du domaine est supposée parfaitement conductrice ou isolante.

La solution du problème mathématique dépend de la conductivité électrique du domaine conducteur et on démontre des estimations a priori uniformes. Ces estimations sont utiles lorsqu'on étudie des développements asymptotiques ou encore pour démontrer des estimations d'erreurs dans des méthodes d'approximations. Des estimations uniformes pour un problème de transmission similaire avec une interface régulière existent dans [33]. Notre approche permet de traiter le cas plus général d'une interface polyédrale. On utilise pour cela une technique de potentiel vecteur pour décomposer le champ électromagnétique, voir [4]. La partie gradient de cette décomposition est estimée grâce aux résultats du chapitre 1.

Le chapitre est organisé de la façon suivante. Dans le paragraphe 2.2, on introduit le problème de transmission électromagnétique. On énonce ensuite le résultat principal au paragraphe suivant, voir théorème 2.25. Puis, on démontre différentes décompositions du champ électrique dans la section 2.4. Le problème général est analysé et l'estimation a priori uniforme démontrée au paragraphe 2.5. On démontre dans une dernière partie des estimations uniformes dans le cas où l'interface et le domaine d'étude sont polyédriques, voir théorème 2.37.

2.2 Description du modèle physique

2.2.1 Les équations de Maxwell harmoniques

Soit Ω un domaine borné de \mathbb{R}^3 . On suppose que Ω est simplement connexe. Soit $\Omega_{\text{cd}} \subset\subset \Omega$ un sous-domaine de Ω et de frontière Σ . On suppose dans la suite que Ω est régulier et Σ est de classe \mathcal{C}^∞ . On traitera le cas où Σ et Ω sont polyédraux au paragraphe 2.6. On note Ω_{is} le complémentaire de $\overline{\Omega_{\text{cd}}}$ dans Ω , voir Figure 1. Ainsi

$$\Sigma = \partial\Omega_{\text{cd}} \cap \partial\Omega_{\text{is}}, \quad \Omega = \Omega_{\text{cd}} \cup \Sigma \cup \Omega_{\text{is}}, \quad \Omega_{\text{cd}} \cap \Omega_{\text{is}} = \emptyset.$$

Le domaine Ω_{is} représente un matériau isolant (par exemple de l'air ou un diélectrique) et Ω_{cd} représente un matériau conducteur (du cuivre ou de l'or par exemple).

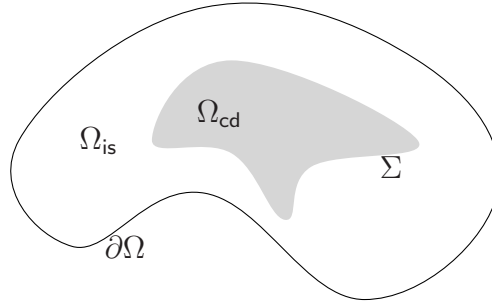


Figure 1 : Le domaine Ω

On suppose que Ω_{is} est parcouru par une source de courant, représentée par \mathbf{j} . Dans la suite, σ désigne la conductivité électrique dans Ω_{cd} . On introduit la fonction de conductivité

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto \sigma \mathbf{1}_{\Omega_{\text{cd}}}(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

Les équations de Maxwell harmoniques en temps, décrivant un rayonnement électromagnétique de pulsation $\omega > 0$ dans un tel corps Ω et induit par une source de courant \mathbf{j} , s'écrivent

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E} - i\omega\mu_0 \mathbf{H} &= 0 & \text{dans } \Omega, & \text{(loi de Faraday)} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} + (i\omega\varepsilon_0 - \mathbf{s})\mathbf{E} &= \mathbf{j} & \text{dans } \Omega, & \text{(loi d'Ampère).} \end{cases} \quad (2.1)$$

Ici, \mathbf{E} est le champ électrique et \mathbf{H} le champ magnétique, et ε_0 et μ_0 sont la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du matériau à l'intérieur de Ω . Sur le bord du domaine $\partial\Omega$, on considère soit la condition de l'isolant parfait pour le champ électrique

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \quad (\text{c. b. isolant parfait}) \quad (2.2)$$

soit la condition du conducteur parfait

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{et} \quad \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \quad (\text{c. b. conducteur parfait}) \quad (2.3)$$

où \mathbf{n} dénote le vecteur normal unitaire sortant sur $\partial\Omega$.

Remarque 2.1 Lorsque l'on impose la condition au bord (2.2), on suppose systématiquement que la donnée \mathbf{j} satisfait $\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, et alors la condition $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$ est une conséquence de la condition $\mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. En effet, d'après la formule de Stokes, on a

$$\operatorname{div}_{\partial\Omega} \mathbf{H} \times \mathbf{n} = \operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega.$$

D'après la loi d'Ampère, voir (2.1), on en déduit que

$$\operatorname{div}_{\partial\Omega} \mathbf{H} \times \mathbf{n} = -(i\omega\varepsilon_0 - s)\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} + \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur} \quad \partial\Omega,$$

ce qui permet de conclure.

Les inconnues \mathbf{E} et \mathbf{H} dépendent de σ . Dans la suite de ce chapitre, on effectue une étude à σ grand et on étudie le comportement lorsque $\sigma \rightarrow +\infty$ des champs électromagnétiques \mathbf{E} et \mathbf{H} dans le domaine Ω .

Remarque 2.2 (i) La pulsation ω correspond à la dépendance en temps $t \mapsto \exp(i\omega t)$. La période associée est $T = \frac{2\pi}{\omega}$. La fréquence f associée est $f = \frac{1}{T}$, et est mesurée en Hz. Ainsi

$$\omega = 2\pi f$$

(ii) Les constantes ε_0 et μ_0 satisfont

$$\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2} \quad (c : \text{vitesse de la lumière})$$

où $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Wb A}^{-1} \text{ m}^{-1}$ et $c \simeq 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.

(iii) On introduit le nombre d'onde κ par

$$\kappa = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

On en déduit la relation suivante entre la pulsation du signal et le nombre d'onde

$$\omega = c\kappa \simeq 3 \times 10^8 \kappa.$$

2.2.2 Le système de Maxwell à petit paramètre

On introduit un petit paramètre $\delta > 0$, défini par

$$\delta = \sqrt{\frac{\omega \varepsilon_0}{\sigma}}$$

et qui est proportionnel à une profondeur de pénétration du champ électromagnétique dans le milieu conducteur. Ainsi, lorsque σ est grand, δ est petit. On pose $\mu = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$ et

$$\varepsilon(\delta) = \frac{1}{\mu} (\mathbf{1}_{\Omega_{is}} + (1 + \frac{i}{\delta^2}) \mathbf{1}_{\Omega_{cd}})$$

On introduit $\mathbf{F} = i\kappa \mathbf{j}$. Le système de Maxwell (2.1) d'ordre 1 et à petit paramètre δ , s'écrit donc

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta - i\kappa\mu \mathbf{H}_\delta &= 0 & \text{dans } \Omega, & \text{(loi de Faraday)} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_\delta + i\kappa\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta &= \frac{1}{i\kappa} \mathbf{F} & \text{dans } \Omega, & \text{(loi d'Ampère).} \end{cases} \quad (2.4)$$

Dans la suite, on suppose que \mathbf{F} est une donnée à support dans Ω . Cette donnée est plus générale que \mathbf{j} , dont le support est inclus dans Ω_{is} . Cette hypothèse permettra d'utiliser les résultats de ce chapitre pour démontrer la convergence de développements asymptotiques. Dans ce chapitre, on s'intéresse au comportement des solutions \mathbf{E}_δ et \mathbf{H}_δ du système (2.4) lorsque $\delta \rightarrow 0$ pour une donnée \mathbf{j} fixée indépendante de δ .

2.3 Formulations variationnelles

2.3.1 Espaces variationnels

Dans ce chapitre, on notera les composantes cartésiennes d'une fonction vectorielle \mathbf{u} par :

$$\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3).$$

On rappelle la formule du rotationnel d'un champ \mathbf{u} en coordonnées cartésiennes

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = \begin{pmatrix} \partial_2 u_3 - \partial_3 u_2 \\ \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3 \\ \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1 \end{pmatrix} \quad \text{pour } \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3).$$

On rappelle aussi la définition des espaces associés au système de Maxwell dans un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, voir [50], et basés sur l'espace

$$\mathbf{L}^2(\Omega) = \{\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \mid u_i \in L^2(\Omega), i = 1, 2, 3\}.$$

Définition 2.3

$$\begin{aligned}
\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \text{rot } \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)\} \\
\mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \mid \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\
\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \text{div } \mathbf{u} \in L^2(\Omega)\} \\
\mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\
\mathbf{H}(\text{div}, 0, \Omega) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \mid \text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ dans } \Omega\}.
\end{aligned}$$

Les normes naturelles sur $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ et $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ sont respectivement

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)}^2 = \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2 + \|\mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2$$

et

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)}^2 = \|\text{div } \mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2 + \|\mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2.$$

Dans la suite, on note \mathbf{u}^{is} la trace de \mathbf{u} restreint à Ω_{is} sur $\partial\Omega_{\text{is}}$ et u^{cd} la trace de \mathbf{u} restreint à Ω_{cd} sur Σ . Afin de préciser la nature des solutions du système de Maxwell (2.4), on définit les espaces variationnels suivant.

Définition 2.4

$$\begin{aligned}
\mathbf{X}(\Omega) &= \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \cap \mathbf{H}(\text{div}, \Omega) \\
\mathbf{X}_{\text{T}}(\Omega) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{X}(\Omega) \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\
\mathbf{X}_{\text{N}}(\Omega) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{X}(\Omega) \mid \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\
\mathbf{X}_{\text{T}}(\Omega, \delta) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \mid \varepsilon(\delta)\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega), \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\} \\
\mathbf{X}_{\text{N}}(\Omega, \delta) &= \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \mid \varepsilon(\delta)\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega), \mathbf{u} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega\}
\end{aligned}$$

Selon le choix des conditions aux bords (2.2) ou (2.3), le problème limite lorsque $\delta \rightarrow 0$ fait apparaitre les espaces suivants

$$\mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{X}(\Omega_{\text{is}}) \mid \mathbf{u}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \mathbf{u}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \Sigma\}$$

ou

$$\mathbf{X}_{\text{N}}(\Omega_{\text{is}}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{X}(\Omega_{\text{is}}) \mid \mathbf{u}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega_{\text{is}}\}$$

où

$$\mathbf{X}(\Omega_{\text{is}}) = \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_{\text{is}}) \cap \mathbf{H}(\text{div}, \Omega_{\text{is}})$$

Remarque 2.5 (i) Munis de la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}(\Omega)}^2 = \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2 + \|\text{div } \mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2 + \|\mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2,$$

$\mathbf{X}_{\text{T}}(\Omega)$ et $\mathbf{X}_{\text{N}}(\Omega)$ sont des espaces de Hilbert.

(ii) Munis de la norme

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{X}(\Omega, \delta)}^2 = \|\text{rot } \mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2 + \|\text{div}(\varepsilon(\delta)\mathbf{u})\|_{0, \Omega}^2 + \|\mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2,$$

$\mathbf{X}_{\text{T}}(\Omega, \delta)$ et $\mathbf{X}_{\text{N}}(\Omega, \delta)$ sont des espaces de Hilbert.

Conditions de transmission du champ électromagnétique

On précise ici les conditions de transmission du champ électromagnétique à l'interface Σ .

Définition 2.6 On définit le saut d'une fonction $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ sur Σ par

$$[\mathbf{u}]_\Sigma = \begin{pmatrix} u_1^{\text{is}} - u_1^{\text{cd}} \\ u_2^{\text{is}} - u_2^{\text{cd}} \\ u_3^{\text{is}} - u_3^{\text{cd}} \end{pmatrix},$$

ce que l'on note $\mathbf{u}^{\text{is}} - \mathbf{u}^{\text{cd}}$.

On note encore \mathbf{n} le vecteur normal unitaire sur Σ , qu'on choisit sortant par rapport à Ω_{is} . D'après [50, Lemme 5.3], on a les résultats suivants.

Lemme 2.7 Soit \mathbf{F} dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Soient \mathbf{E}_δ et \mathbf{H}_δ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ solutions de (2.4). Alors, \mathbf{E}_δ et $\mathbf{H}_\delta \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ et

$$[\mathbf{E}_\delta \times \mathbf{n}]_\Sigma = 0 \quad \text{et} \quad [\mathbf{H}_\delta \times \mathbf{n}]_\Sigma = 0.$$

Lemme 2.8 Soit $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$. Soient \mathbf{E}_δ et \mathbf{H}_δ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ solutions de (2.4). Alors, $\varepsilon(\delta)\mathbf{E}_\delta$ et $\mathbf{H}_\delta \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ et

$$[\varepsilon(\delta)\mathbf{E}_\delta \cdot \mathbf{n}]_\Sigma = 0 \quad \text{et} \quad [\mathbf{H}_\delta \cdot \mathbf{n}]_\Sigma = 0.$$

De plus,

$$\text{div } \varepsilon(\delta)\mathbf{E}_\delta = -\frac{1}{\kappa^2} \text{div } \mathbf{F} \quad \text{et} \quad \text{div } \mathbf{H}_\delta = 0 \quad \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Remarque 2.9 La condition de transmission $[\varepsilon(\delta)\mathbf{E}_\delta \cdot \mathbf{n}]_\Sigma = 0$ s'écrit

$$\mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} = \left(1 + \frac{i}{\delta^2}\right) \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma$$

Selon le choix des conditions au bord (2.2) ou (2.3) pour le champ électromagnétique, on en déduit les résultats suivants.

Lemme 2.10 Soit $\mathbf{F} \in \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega)$. Soient \mathbf{E}_δ et \mathbf{H}_δ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ solutions de (2.2) et (2.4). Alors, $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$ et $\mathbf{H}_\delta \in \mathbf{X}_N(\Omega)$.

Lemme 2.11 Soit $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$. Soient \mathbf{E}_δ et \mathbf{H}_δ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ solutions de (2.3) et (2.4). Alors, $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_N(\Omega, \delta)$ et $\mathbf{H}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega)$.

2.3.2 Problème variationnel en champ électrique

Dans la suite, on élimine le champ magnétique dans le système de Maxwell (2.4) d'ordre 1, ce qui nous ramène à une formulation en champ électrique. On introduit la notation suivante.

Notation 2.12 Pour $\mathbf{E}, \mathbf{E}' \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$,

$$b_\delta(\mathbf{E}, \mathbf{E}') = \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{E} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{E}}' \right) d\mathbf{x} \quad (2.5)$$

Proposition 2.13 Soit $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Soient \mathbf{E}_δ et \mathbf{H}_δ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ solutions de (2.2) et de (2.4). Alors $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ et

$$\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega), \quad b_\delta(\mathbf{E}_\delta, \mathbf{E}') = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{E}}' d\mathbf{x} \quad (2.6)$$

La démonstration de la proposition 2.13 repose sur le lemme suivant.

Lemme 2.14

$$\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega), \forall \mathbf{H} \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega), \quad \int_{\Omega} \mathbf{H} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{H} \cdot \bar{\mathbf{E}}' d\mathbf{x} \quad (2.7)$$

PREUVE. [Lemme 2.14]

On commence par prouver ce résultat pour $\mathbf{E}' \in C^\infty(\bar{\Omega})^3$. On utilise la densité de $C^\infty(\bar{\Omega})^3$ dans $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, voir [31], pour conclure au lemme. ■

Démonstration de la Proposition 2.13

PREUVE. D'après (2.4), on a

$$\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega), \quad \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{E}_\delta \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - i\kappa \mathbf{H}_\delta \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' \right) d\mathbf{x} = 0$$

et

$$\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega), \quad i\kappa \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{H}_\delta \cdot \bar{\mathbf{E}}' + i\kappa \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta \cdot \bar{\mathbf{E}}') d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{E}}' d\mathbf{x}$$

En additionnant ces deux intégrales, il vient

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega), \quad \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{E}_\delta \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - i\kappa (\mathbf{H}_\delta \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - \text{rot } \mathbf{H}_\delta \cdot \bar{\mathbf{E}}') \right. \\ \left. - \kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta \cdot \bar{\mathbf{E}}' \right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{E}}' d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{H}_\delta \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$, par le lemme 2.14, on en déduit (2.6). ■

On peut interpréter le problème (2.6) en termes d'équations aux dérivées partielles. En effectuant des intégrations par parties dans la relation (2.6), on obtient la formulation forte en champ électrique associée au problème variationnel (2.6). Ceci fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 2.15 *Si $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ est une solution du problème (2.6), alors \mathbf{E}_δ est solution au sens des distributions des équations suivantes*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{rot rot } \mathbf{E}_\delta - \kappa^2 \mathbf{E}_\delta &= \mu \mathbf{F}^{\text{is}} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \text{rot rot } \mathbf{E}_\delta - \kappa^2 (1 + \frac{i}{\delta^2}) \mathbf{E}_\delta &= \mu \mathbf{F}^{\text{cd}} \quad \text{dans } \Omega_{\text{cd}} \\ [\mathbf{E}_\delta \times \mathbf{n}]_\Sigma &= 0 \\ [\text{rot } \mathbf{E}_\delta \times \mathbf{n}]_\Sigma &= 0 \\ \text{rot } \mathbf{E}_\delta \times \mathbf{n} &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (2.8)$$

Réciproquement, si \mathbf{E}_δ est solution des équations (2.8) au sens des distributions, alors \mathbf{E}_δ satisfait aussi la relation suivante

$$\frac{1}{\mu} \text{rot rot } \mathbf{E}_\delta - \kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta = \mathbf{F} \quad \text{dans } \Omega \quad (2.9)$$

au sens des distributions, et puisque $\kappa > 0$, \mathbf{E}_δ vérifie de plus l'identité suivante au sens des distributions

$$\text{div} (\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) = -\frac{1}{\kappa^2} \text{div } \mathbf{F} \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.10)$$

PREUVE. On prend $\mathbf{E}' \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support dans Ω_{is} comme fonction test dans (2.6). Comme

$$\int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{E}_\delta \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' d\mathbf{x} = \langle \text{rot rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{is}}, \mathbf{E}'^{\text{is}} \rangle_{\Omega_{\text{is}}}$$

on en déduit la première relation du système (2.8). De même, en prenant $\mathbf{E}' \in \mathcal{D}(\Omega)$ à support dans Ω_{cd} comme fonction test dans (2.6), on en déduit la seconde relation du système (2.8). La troisième relation est une conséquence du fait que $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, voir le lemme 2.7. La suite de la preuve de cette proposition repose sur la formule de Stokes suivante, voir [8],

$$\forall \mathbf{E}, \mathbf{H} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega), \quad \int_{\Omega} (\text{rot } \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{H}} - \mathbf{E} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{H}}) d\mathbf{x} = \langle \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \mathbf{H}_\tau \rangle_{\partial\Omega} \quad (2.11)$$

où $\mathbf{H}_\tau = (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{n}$. D'après (2.8)₁, on a $\text{rot } \mathbf{E}^{\text{is}} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_{\text{is}})$. Donc, en appliquant la formule (2.11) dans Ω_{is} à $\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{is}}$ et $\mathbf{H} = \mathbf{E}' \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, il vient

$$\int_{\Omega_{\text{is}}} \text{rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{\text{is}}} \text{rot rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{E}}' d\mathbf{x} + \langle \text{rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \times \mathbf{n}, \mathbf{E}'_\tau \rangle_{\partial\Omega_{\text{is}}}.$$

En appliquant la formule (2.11) dans Ω_{cd} à $\mathbf{E} = \text{rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}}$ et $\mathbf{H} = \mathbf{E}' \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, il vient

$$\int_{\Omega_{\text{cd}}} \text{rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}'^{\text{cd}} d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{\text{cd}}} \text{rot rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}} \cdot \bar{\mathbf{E}}'^{\text{cd}} d\mathbf{x} - \langle \text{rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}} \times \mathbf{n}, \mathbf{E}'_{\tau} \rangle_{\Sigma}.$$

En additionnant ces deux relations, pour tout $\mathbf{E}' \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} \text{rot } \mathbf{E}_\delta \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \text{rot rot } \mathbf{E}_\delta \cdot \bar{\mathbf{E}}' d\mathbf{x} + \langle [\text{rot } \mathbf{E}_\delta \times \mathbf{n}]_{\Sigma}, \mathbf{E}'_{\tau} \rangle_{\Sigma} + \langle \text{rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \times \mathbf{n}, \mathbf{E}'_{\tau} \rangle_{\partial\Omega}.$$

D'après (2.6), (2.8)₁ et (2.8)₂, pour tout $\mathbf{E}' \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$, il vient

$$\langle [\text{rot } \mathbf{E}_\delta \times \mathbf{n}]_{\Sigma}, \mathbf{E}'_{\tau} \rangle_{\Sigma} + \langle \text{rot } \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \times \mathbf{n}, \mathbf{E}'_{\tau} \rangle_{\partial\Omega} = 0.$$

On en déduit les relations (2.8)₄ et (2.8)₅. ■

Remarque 2.16 D'après la relation (2.10), on en déduit l'identité suivante au sens des distributions sur Σ .

$$(1 + \frac{i}{\delta^2}) \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (2.12)$$

Remarque 2.17 Le lemme 2.14 s'applique encore pour $\mathbf{E}' \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ et $\mathbf{H} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$. Ainsi, si \mathbf{E}_δ et \mathbf{H}_δ sont dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ et solutions de (2.3) et de (2.4) associés à $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, alors $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ et

$$\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega), \quad b_\delta(\mathbf{E}_\delta, \mathbf{E}') = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{E}}' d\mathbf{x} \quad (2.13)$$

De la proposition 2.13, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 2.18 Soit $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$. Soient \mathbf{E}_δ et \mathbf{H}_δ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ solutions de (2.2) et de (2.4). Alors $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$ et une formulation variationnelle associée au système d'équations (2.4) s'écrit

Trouver $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$ tel que

$$\forall \mathbf{E}'_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta), \quad b_\delta(\mathbf{E}_\delta, \mathbf{E}'_\delta) = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{E}}'_\delta d\mathbf{x} \quad (2.14)$$

PREUVE. En effet, d'après le lemme 2.10, $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$. Donc, la proposition 2.13 permet de conclure à la formulation (2.14). ■

D'après la remarque 2.17 et le lemme 2.11, on démontre aussi le résultat suivant.

Proposition 2.19 Soient \mathbf{E}_δ et \mathbf{H}_δ des solutions de (2.3) et de (2.4) dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ associées à $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$. Alors $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{N}(\Omega, \delta)$ et une formulation variationnelle associée au système d'équations (2.4) s'écrit

Trouver $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{N}(\Omega, \delta)$ tel que

$$\forall \mathbf{E}'_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{N}(\Omega, \delta), \quad b_\delta(\mathbf{E}_\delta, \mathbf{E}'_\delta) = \int_\Omega \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{E}}'_\delta \, d\mathbf{x} \quad (2.15)$$

Remarque 2.20

$$b_\delta(\mathbf{E}, \mathbf{E}') = \int_\Omega \frac{1}{\mu} \left(\text{rot } \mathbf{E} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{E}}' \right) d\mathbf{x} - i\kappa \frac{\varepsilon_0 \omega}{\delta^2} \int_{\Omega_{\text{cd}}} \mathbf{E} \cdot \bar{\mathbf{E}}' d\mathbf{x} \quad (2.16)$$

En particulier,

$$\text{Re } b_\delta(\mathbf{E}, \mathbf{E}) = \frac{1}{\mu} \int_\Omega (|\text{rot } \mathbf{E}|^2 - \kappa^2 |\mathbf{E}|^2) d\mathbf{x} \quad (2.17)$$

Ainsi, la forme sesquilinéaire a_δ associée à la formulation variationnelle (2.14) n'est pas coercive sur $\mathbf{X}_\mathbf{T}(\Omega, \delta)$ en général, sauf si κ est petit.

Dans la suite, on va régulariser ce problème de Maxwell, en introduisant dans la forme sesquilinéaire un terme supplémentaire de divergence.

2.3.3 Equations de Maxwell régularisées

Dans ce paragraphe, on rappelle les formulations variationnelles régularisées associées au problème (2.14) et (2.15), voir [14, 13]. La formulation régularisée du problème (2.14) s'écrit :

Trouver $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{T}(\Omega, \delta)$ tel que pour tout $\mathbf{E}'_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{T}(\Omega, \delta)$,

$$\int_\Omega \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{E}_\delta \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}'_\delta + \alpha \text{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) \text{div}(\overline{\varepsilon(\delta) \mathbf{E}'_\delta}) - \kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta \cdot \bar{\mathbf{E}}'_\delta \right) d\mathbf{x} = \langle f, \mathbf{E}'_\delta \rangle \quad (2.18)$$

où

$$\langle f, \mathbf{E}'_\delta \rangle = \int_\Omega \left(\mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{E}}'_\delta - \frac{\alpha}{\kappa^2} \text{div } \mathbf{F} \text{div}(\overline{\varepsilon(\delta) \mathbf{E}'_\delta}) \right) d\mathbf{x} \quad (2.19)$$

et où $\alpha > 0$ est un paramètre qu'on précisera dans la suite. On utilisera le théorème suivant, voir [13].

Théorème 2.21 Il existe un réel $\alpha > 0$ indépendant de δ tel que si $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{T}(\Omega, \delta)$ est une solution de (2.18)-(2.19) associée à $\mathbf{F} \in \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega)$, alors

$$\text{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) + \frac{1}{\kappa^2} \text{div } \mathbf{F} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.20)$$

On pose $\mathbf{H}_\delta = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta$, alors \mathbf{E}_δ et \mathbf{H}_δ sont solutions des équations de Maxwell (2.2)-(2.4).

PREUVE. On définit l'opérateur

$$\begin{aligned} \Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\text{Neu}} : H^1(\Omega) &\rightarrow H^1(\Omega)' \\ \varphi &\mapsto \operatorname{div} \varepsilon(\delta) \nabla \varphi \end{aligned}$$

où $\operatorname{div} \varepsilon(\delta) \nabla \varphi$ désigne l'élément de $H^1(\Omega)'$ défini par

$$\psi \in H^1(\Omega) \mapsto \int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \nabla \varphi \cdot \overline{\nabla \psi} \, d\mathbf{x}$$

Le domaine de cet opérateur est défini par

$$D(\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\text{Neu}}) = \{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \operatorname{div} \varepsilon(\delta) \nabla \varphi \in L^2(\Omega) \}$$

Par conséquent, si $\varphi \in D(\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\text{Neu}})$, alors $\partial_{\mathbf{n}} \varphi = 0$ sur $\partial\Omega$. Ainsi, on a

$$\forall \varphi \in D(\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\text{Neu}}), \quad \nabla \varphi \in \mathbf{X}_{\mathbf{T}}(\Omega, \delta).$$

Soit \mathbf{E}_δ une solution de (2.18). On choisit comme fonction test $\mathbf{E}' = \nabla \varphi$ où $\varphi \in D(\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\text{Neu}})$. Ainsi, d'après (2.18),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\alpha \operatorname{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) \operatorname{div}(\overline{\varepsilon(\delta) \nabla \varphi}) - \kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta \cdot \overline{\nabla \varphi} \right) d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \left(\mathbf{F} \cdot \overline{\nabla \varphi} - \frac{\alpha}{\kappa^2} \operatorname{div} \mathbf{F} \operatorname{div}(\overline{\varepsilon(\delta) \nabla \varphi}) \right) d\mathbf{x} \quad (2.21) \end{aligned}$$

Or, puisque $\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta, \mathbf{F} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega)$ et $\varphi \in H^1(\Omega)$, par une formule de Green, il vient

$$\int_{\Omega} -\kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta \cdot \overline{\nabla \varphi} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \kappa^2 \operatorname{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) \bar{\varphi} \, d\mathbf{x}$$

et

$$\int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \overline{\nabla \varphi} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \bar{\varphi} \, d\mathbf{x}.$$

Donc,

$$\forall \varphi \in D(\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\text{Neu}}), \quad \int_{\Omega} \left(\operatorname{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) + \frac{1}{\kappa^2} \operatorname{div} \mathbf{F} \right) \left(\alpha \operatorname{div}(\overline{\varepsilon(\delta) \nabla \varphi}) + \kappa^2 \bar{\varphi} \right) d\mathbf{x} = 0. \quad (2.22)$$

La forme sesquilinéaire associée à l'opérateur $-\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\text{Neu}}$ est uniformément coercive sur le sous-espace orthogonal aux constantes

$$W = \{ \varphi \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} \varphi \, d\mathbf{x} = 0 \}$$

car

$$\forall \varphi \in W, \quad \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \nabla \varphi \cdot \overline{\nabla \varphi} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\mu} |\varphi|_{1,\Omega}^2.$$

Donc, l'opérateur $-\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\text{Neu}}$ est inversible de $D(\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\text{Neu}}) \cap W$ sur $L_0^2(\Omega)$, le sous-espace de $L^2(\Omega)$ orthogonal aux constantes, et a un spectre discret. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in W, \quad \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \nabla \varphi \cdot \overline{\nabla \varphi} \, d\mathbf{x} \geq C \|\varphi\|_{1,\Omega}^2. \quad (2.23)$$

On examine à présent les valeurs propres réelles non-nulles de l'opérateur $-\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\text{Neu}}$: soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\varphi \in D(\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\text{Neu}}) \cap W \setminus \{0\}$ tel que

$$-\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\text{Neu}} \varphi = \lambda \varphi \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.24)$$

En multipliant l'équation aux valeurs propres (2.24) par $\bar{\varphi}$, puis en intégrant par partie, il vient

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \nabla \varphi \cdot \overline{\nabla \varphi} \, d\mathbf{x} = \lambda \int_{\Omega} \varphi \bar{\varphi} \, d\mathbf{x}.$$

D'après (2.23), on conclut que $\lambda \geq C$ car $\varphi \neq 0$. On choisit à présent $\alpha > 0$ assez grand tel que $\frac{\kappa^2}{\alpha} < C$. Alors $\frac{\kappa^2}{\alpha}$ n'est pas valeur propre de l'opérateur $-\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\text{Neu}}$. Par suite, d'après (2.22), on en déduit que $\operatorname{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_{\delta}) + \frac{1}{\kappa^2} \operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ dans Ω . Ainsi, d'après (2.18),

$$\forall \mathbf{E}'_{\delta} \in \mathbf{X}_{\mathbf{T}}(\Omega, \delta) \quad \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\delta} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}'_{\delta} - \kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_{\delta} \cdot \bar{\mathbf{E}}'_{\delta} \right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{E}}'_{\delta} d\mathbf{x}$$

On définit \mathbf{H}_{δ} à partir de la loi de Faraday par $\mathbf{H}_{\delta} = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \operatorname{rot} \mathbf{E}_{\delta}$ dans Ω . Alors, d'après le lemme 2.14, il vient

$$\forall \mathbf{E}'_{\delta} \in \mathbf{X}_{\mathbf{T}}(\Omega, \delta) \quad \int_{\Omega} \left(\frac{i\omega\varepsilon_0}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{H}_{\delta} \cdot \bar{\mathbf{E}}'_{\delta} - \kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_{\delta} \cdot \bar{\mathbf{E}}'_{\delta} \right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{E}}'_{\delta} d\mathbf{x}$$

Donc, on retrouve l'équation d'Ampère

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_{\delta} + i\kappa\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_{\delta} = \frac{1}{i\kappa} \mathbf{F} \quad \text{dans } \Omega.$$

■

De façon similaire, la formulation régularisée du problème (2.15) s'écrit :

Trouver $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{N}(\Omega, \delta)$ tel que pour tout $\mathbf{E}'_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{N}(\Omega, \delta)$,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}'_\delta + \beta \operatorname{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) \operatorname{div}(\overline{\varepsilon(\delta) \mathbf{E}'_\delta}) - \kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta \cdot \bar{\mathbf{E}}'_\delta \right) d\mathbf{x} = \langle f, \mathbf{E}'_\delta \rangle \quad (2.25)$$

où

$$\langle f, \mathbf{E}'_\delta \rangle = \int_{\Omega} \left(\mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{E}}'_\delta - \frac{\beta}{\kappa^2} \operatorname{div} \mathbf{F} \operatorname{div}(\overline{\varepsilon(\delta) \mathbf{E}'_\delta}) \right) d\mathbf{x} \quad (2.26)$$

et $\beta > 0$ est un paramètre qu'on précisera dans la suite. On utilisera le théorème suivant, voir [13].

Théorème 2.22 *Il existe un réel $\beta > 0$ indépendant de δ tel que si $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{N}(\Omega, \delta)$ est une solution de (2.25)-(2.26) associée à $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$, alors*

$$\operatorname{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) + \frac{1}{\kappa^2} \operatorname{div} \mathbf{F} = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.27)$$

Si de plus $\mathbf{H}_\delta = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta$, alors \mathbf{E}_δ et \mathbf{H}_δ sont solutions des équations de Maxwell (2.3)-(2.4).

PREUVE. On définit l'opérateur

$$\begin{aligned} \Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\operatorname{Dir}} : \mathbf{H}^1(\Omega) &\rightarrow \mathbf{H}^1(\Omega)' \\ \varphi &\mapsto \operatorname{div} \varepsilon(\delta) \nabla \varphi \end{aligned}$$

et son domaine

$$D(\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\operatorname{Dir}}) = \{\varphi \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid \operatorname{div} \varepsilon(\delta) \nabla \varphi \in L^2(\Omega)\}$$

Par définition, on vérifie que

$$\forall \varphi \in D(\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\operatorname{Dir}}), \quad \nabla \varphi \in \mathbf{X}_\mathbf{N}(\Omega, \delta).$$

Soit \mathbf{E}_δ une solution de (2.25)-(2.26). On choisit comme fonction test $\mathbf{E}' = \nabla \varphi$ où $\varphi \in D(\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\operatorname{Dir}})$. Ainsi, d'après (2.25),

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(\beta \operatorname{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) \operatorname{div}(\overline{\varepsilon(\delta) \nabla \varphi}) - \kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta \cdot \overline{\nabla \varphi} \right) d\mathbf{x} \\ = \int_{\Omega} \left(\mathbf{F} \cdot \overline{\nabla \varphi} - \frac{\beta}{\kappa^2} \operatorname{div} \mathbf{F} \operatorname{div}(\overline{\varepsilon(\delta) \nabla \varphi}) \right) d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Or, puisque $\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta, \mathbf{F} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$ et $\varphi \in H_0^1(\Omega)$, par une formule de Green, il vient

$$\int_{\Omega} -\kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta \cdot \overline{\nabla \varphi} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \kappa^2 \operatorname{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) \overline{\varphi} \, d\mathbf{x}$$

et

$$\int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \overline{\nabla \varphi} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \overline{\varphi} \, d\mathbf{x}.$$

Donc,

$$\forall \varphi \in D(\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\operatorname{Dir}}), \int_{\Omega} \left(\operatorname{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) + \frac{1}{\kappa^2} \operatorname{div} \mathbf{F} \right) (\beta \operatorname{div}(\overline{\varepsilon(\delta) \nabla \varphi}) + \kappa^2 \overline{\varphi}) \, d\mathbf{x} = 0. \quad (2.28)$$

La forme sesquilinéaire associée à l'opérateur $-\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\operatorname{Dir}}$ est coercive sur $H_0^1(\Omega)$ car

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \nabla \varphi \cdot \overline{\nabla \varphi} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\mu} |\varphi|_{1,\Omega}^2.$$

Donc, l'opérateur $-\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\operatorname{Dir}}$ est inversible de $D(\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\operatorname{Dir}})$ sur $L^2(\Omega)$ et a un spectre discret. De plus, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \quad \operatorname{Re} \int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \nabla \varphi \cdot \overline{\nabla \varphi} \, d\mathbf{x} \geq C \|\varphi\|_{1,\Omega}^2. \quad (2.29)$$

On examine à présent les valeurs propres réelles non-nulles de l'opérateur $-\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\operatorname{Dir}}$: soit $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ et $\varphi \in D(\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\operatorname{Dir}}) \setminus \{0\}$ tel que

$$-\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\operatorname{Dir}} \varphi = \lambda \varphi \quad \text{dans } \Omega \quad (2.30)$$

En multipliant l'équation aux valeurs propres (2.30) par $\overline{\varphi}$, puis en intégrant par partie, il vient

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \nabla \varphi \cdot \overline{\nabla \varphi} \, d\mathbf{x} = \lambda \int_{\Omega} \varphi \overline{\varphi} \, d\mathbf{x}.$$

D'après (2.29), on conclut que $\lambda \geq C$ car $\varphi \neq 0$. On choisit à présent $\beta > 0$ assez grand tel que $\frac{\kappa^2}{\beta} < C$. Alors $\frac{\kappa^2}{\beta}$ n'est pas valeur propre de l'opérateur $-\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\operatorname{Dir}}$. Par suite, d'après (2.28), on en déduit que $\operatorname{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) + \frac{1}{\kappa^2} \operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ dans Ω . On utilise encore le lemme 2.14 pour conclure. ■

Remarque 2.23 *L'ensemble des opérateurs bornés et inversibles est un ouvert dans l'ensemble des opérateurs bornés entre deux espaces de Banach. A partir de la relation (2.28), on peut en déduire directement la relation (2.27) sans utiliser le spectre de l'opérateur $\Delta_{\varepsilon(\delta)}^{\operatorname{Dir}}$.*

2.3.4 Estimation a priori uniforme

Dans toute la suite, on fixe un réel $\alpha > 0$ donné par le théorème 2.21. On effectue l'hypothèse spectrale suivante.

Hypothèse 2.24 (HS) κ^2 n'est pas valeur propre du problème limite

Trouver $\mathbf{E}_0 \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$ tel que pour tout $\mathbf{E}' \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$,

$$\int_{\Omega_{\text{is}}} (\text{rot } \mathbf{E}_0 \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \mathbf{E}_0 \cdot \bar{\mathbf{E}}') \, d\mathbf{x} = 0 \quad (2.31)$$

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème 2.25 Sous l'hypothèse spectrale 2.24, il existe une constante $\delta_0 > 0$ telle que pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$, le problème (2.18)-(2.19) admet une unique solution $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_{\text{T}}(\Omega, \delta)$ associée à $\mathbf{F} \in \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega)$, et qui de plus vérifie l'estimation

$$\|\text{rot } \mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} + \|\text{div } \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\delta} \|\mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega_{\text{cd}}} \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)} \quad (2.32)$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de δ .

On a un résultat similaire pour le problème analogue posé dans $\mathbf{X}_{\text{N}}(\Omega, \delta)$. On fixe à présent un réel $\beta > 0$ donné par le théorème 2.22. Sous l'hypothèse spectrale suivante

Hypothèse 2.26 κ^2 n'est pas valeur propre du problème limite

Trouver $\mathbf{E}_0 \in \mathbf{X}_{\text{N}}(\Omega_{\text{is}})$ tel que pour tout $\mathbf{E}' \in \mathbf{X}_{\text{N}}(\Omega_{\text{is}})$,

$$\int_{\Omega_{\text{is}}} (\text{rot } \mathbf{E}_0 \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \mathbf{E}_0 \cdot \bar{\mathbf{E}}') \, d\mathbf{x} = 0 \quad (2.33)$$

on a le résultat suivant

Théorème 2.27 Sous l'hypothèse spectrale 2.26, il existe une constante $\delta_1 > 0$ telle que pour tout $\delta \in (0, \delta_1)$, le problème (2.25)-(2.26) admet une unique solution $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_{\text{N}}(\Omega, \delta)$ associée à $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$, et qui de plus vérifie l'estimation

$$\|\text{rot } \mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} + \|\text{div } \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\delta} \|\mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega_{\text{cd}}} \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)} \quad (2.34)$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de δ .

2.4 Une décomposition du champ électrique

Dans ce paragraphe, on s'intéresse aux solutions $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$ du problème (2.18) et $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_N(\Omega, \delta)$ du problème (2.25). Dans l'optique de démontrer les estimations a priori uniformes (2.32) et (2.34), on effectue une décomposition de \mathbf{E}_δ comme suit

$$\mathbf{E}_\delta = \mathbf{w}_\delta + \nabla \varphi_\delta$$

voir les théorèmes 2.29 et 2.30. On utilise ici une technique de potentiel vecteur, voir [4].

Définition 2.28 On définit l'espace variationnel suivant

$$V = \{\varphi \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega_{cd}} \varphi^{cd} d\mathbf{x} = 0\} \quad (2.35)$$

On reprend aussi les notations de la définition 2.4. Le résultat principal de cette section est le suivant.

Théorème 2.29 Soit $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$. Alors, il existe un unique couple $(\mathbf{w}_\delta, \varphi_\delta) \in \mathbf{X}_T(\Omega) \times V$ tel que

$$\mathbf{E}_\delta = \mathbf{w}_\delta + \nabla \varphi_\delta \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{w}_\delta = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.36)$$

On donne les démonstrations et détails au paragraphe 2.4.1. On démontrera aussi le résultat suivant au paragraphe 2.4.2.

Théorème 2.30 Soit $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_N(\Omega, \delta)$. Alors, il existe un unique couple $(\mathbf{w}_\delta, \varphi_\delta) \in \mathbf{X}_N(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\mathbf{E}_\delta = \mathbf{w}_\delta + \nabla \varphi_\delta \quad \text{dans } \Omega \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{w}_\delta = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (2.37)$$

2.4.1 Existence d'un potentiel vecteur tangentiel

Le résultat de cette sous-section est issu de l'article [4].

Théorème 2.31 Soit $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$. Alors, il existe un unique $\mathbf{w}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{w}_\delta = \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{w}_\delta = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.38)$$

De plus, $\mathbf{w}_\delta \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ et il existe une constante $C > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|\mathbf{w}_\delta\|_{1,\Omega} \leq C \|\operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} \quad (2.39)$$

PREUVE. Notons $\mathbf{u}_\delta = \text{rot } \mathbf{E}_\delta$. On a $\mathbf{u}_\delta \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ et $\text{div } \mathbf{u}_\delta = 0$ dans Ω . Or, d'après le théorème de la divergence,

$$\langle \mathbf{u}_\delta \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{u}_\delta \, d\mathbf{x}$$

Ainsi,

$$\langle \mathbf{u}_\delta \cdot \mathbf{n}, 1 \rangle_{\partial\Omega} = 0$$

Donc, d'après [4, Th. 3.12], il existe un unique $\mathbf{w}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{w}_\delta = \mathbf{u}_\delta & \text{dans } \Omega \\ \text{div } \mathbf{w}_\delta = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.40)$$

Ainsi, l'opérateur

$$L : \begin{array}{ccc} \mathbf{H}(\text{div}, 0, \Omega) & \rightarrow & \mathbf{X}_T(\Omega) \\ \mathbf{u}_\delta & \mapsto & \mathbf{w}_\delta \end{array}$$

où \mathbf{w}_δ est la solution du problème (2.40) associée à \mathbf{u}_δ , est un isomorphisme. L'opérateur L^{-1} étant continu, d'après le théorème d'isomorphisme de Banach, L est aussi continu. Ainsi, il existe une constante $C > 0$, indépendante de δ , tel que

$$\|\mathbf{w}_\delta\|_{\mathbf{X}(\Omega)} \leq C \|\text{rot } \mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} \quad (2.41)$$

De plus, Ω étant un domaine régulier, d'après le théorème 2.9 de [4], $\mathbf{X}_T(\Omega)$ s'injecte continuellement dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$. On en déduit l'estimation (2.39). ■

Démonstration du Théorème 2.29

D'après le théorème 2.31, il vient

$$\text{rot}(\mathbf{E}_\delta - \mathbf{w}_\delta) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.42)$$

Or, Ω est simplement connexe. Donc, il existe $\varphi_\delta \in H^1(\Omega)$, unique à une constante additive près, tel que

$$\mathbf{E}_\delta - \mathbf{w}_\delta = \nabla \varphi_\delta \quad \text{dans } \Omega \quad (2.43)$$

En particulier, on choisit φ_δ tel que $\int_{\Omega_{\text{cd}}} \varphi_\delta \, d\mathbf{x} = 0$. De plus,

$$\mathbf{E}_\delta \cdot \mathbf{n} = \mathbf{w}_\delta \cdot \mathbf{n} = 0$$

sur $\partial\Omega$. Donc

$$\partial_{\mathbf{n}} \varphi_\delta = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (2.44)$$

2.4.2 Existence d'un potentiel vecteur normal

Le résultat de cette sous-section est aussi issu de l'article [4].

Théorème 2.32 Soit $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{N}(\Omega, \delta)$. Alors, il existe un unique $\mathbf{w}_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{N}(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \mathbf{w}_\delta = \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta & \text{dans } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{w}_\delta = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (2.45)$$

De plus, $\mathbf{w}_\delta \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ et il existe une constante $C > 0$, indépendante de δ , tel que :

$$\|\mathbf{w}_\delta\|_{1,\Omega} \leq C \|\operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} \quad (2.46)$$

PREUVE. La preuve est une conséquence du théorème [4, Th. 3.17] ■

Démonstration du théorème 2.30

La preuve est similaire à celle du théorème 2.29. D'après le théorème 2.32, il vient

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}_\delta - \mathbf{w}_\delta) = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

Or, Ω est simplement connexe. Donc, il existe $\psi_\delta \in H^1(\Omega)$, unique à une constante additive près, tel que

$$\mathbf{E}_\delta - \mathbf{w}_\delta = \nabla \psi_\delta \quad \text{dans } \Omega \quad (2.47)$$

De plus, $\mathbf{E}_\delta \times \mathbf{n} = \mathbf{w}_\delta \times \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Donc, il existe une constante c tel que

$$\psi_\delta = c \quad \text{sur } \partial\Omega.$$

Soit $\varphi_\delta = \psi_\delta - c$. Alors $\varphi_\delta \in H_0^1(\Omega)$ est déterminé de façon unique et d'après (2.47),

$$\mathbf{E}_\delta = \mathbf{w}_\delta + \nabla \varphi_\delta \quad \text{dans } \Omega$$

2.4.3 Une formulation variationnelle pour la partie scalaire

Dans cette section, on donne une formulation variationnelle pour le terme $\varphi_\delta \in V$, respectivement $\varphi_\delta \in H_0^1(\Omega)$, intervenant dans la décomposition du champ électrique, voir le théorème 2.29, respectivement le théorème 2.30.

Lemme 2.33 Soit $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{T}(\Omega, \delta)$ une solution de (2.18)-(2.19) associée à $\mathbf{F} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega)$, et soit $(\mathbf{w}_\delta, \varphi_\delta) \in \mathbf{X}_\mathbf{T}(\Omega) \times V$ donnés par le théorème 2.29. Alors, φ_δ est la solution du problème variationnel suivant

Trouver $\varphi \in V$ tel que $\forall \psi \in V$,

$$\int_\Omega \varepsilon(\delta) \nabla \varphi \cdot \overline{\nabla \psi} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\kappa^2} \int_\Omega \operatorname{div} \mathbf{F} \, \bar{\psi} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\mu \delta^2} \int_\Sigma \mathbf{w}_\delta \cdot \mathbf{n} \big|_\Sigma \, \bar{\psi} \, ds \quad (2.48)$$

PREUVE. [Lemme 2.33] Avec les notations du théorème 2.29 et pour $\varphi = \varphi_\delta$,

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \nabla \varphi_\delta \cdot \overline{\nabla \psi} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta \cdot \overline{\nabla \psi} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \mathbf{w}_\delta \cdot \overline{\nabla \psi} \, d\mathbf{x}$$

Or, d'après la formule de la divergence, puisque $\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta \in \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega)$,

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta \cdot \overline{\nabla \psi} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \text{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) \bar{\psi} \, d\mathbf{x}$$

donc d'après le théorème 2.21,

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta \cdot \overline{\nabla \psi} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \frac{1}{\kappa^2} \text{div} \mathbf{F} \bar{\psi} \, d\mathbf{x}.$$

De plus,

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \mathbf{w}_\delta \cdot \overline{\nabla \psi} \, d\mathbf{x} = - \frac{1}{\mu} \frac{i}{\delta^2} \int_{\Sigma} \mathbf{w}_\delta \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma} \bar{\psi} \, ds$$

En effet, en intégrant par partie sur Ω_{is} et Ω_{cd} , et puisque $\text{div} \mathbf{w}_\delta = 0$ dans Ω , il vient

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \mathbf{w}_\delta \cdot \overline{\nabla \psi} \, d\mathbf{x} = \int_{\Sigma} (\varepsilon(\delta)^{\text{is}} - \varepsilon(\delta)^{\text{cd}}) \mathbf{w}_\delta \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma} \bar{\psi} \, ds$$

car $\mathbf{w}_\delta \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Enfin,

$$\varepsilon(\delta)^{\text{is}} - \varepsilon(\delta)^{\text{cd}} = - \frac{1}{\mu} \frac{i}{\delta^2},$$

d'où le résultat (2.48). ■

D'après le théorème 2.30, on démontre le résultat qui suit de façon similaire.

Lemme 2.34 Soit $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_N(\Omega, \delta)$ une solution de (2.25)-(2.26) associée à $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$, et soit $(\mathbf{w}_\delta, \varphi_\delta) \in \mathbf{X}_N(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ donnés par le théorème 2.30. Alors, φ_δ est la solution du problème variationnel suivant

Trouver $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ tel que $\forall \psi \in H_0^1(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\delta) \nabla \varphi \cdot \overline{\nabla \psi} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\kappa^2} \int_{\Omega} \text{div} \mathbf{F} \bar{\psi} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\mu} \frac{i}{\delta^2} \int_{\Sigma} \mathbf{w}_\delta \cdot \mathbf{n}|_{\Sigma} \bar{\psi} \, ds \quad (2.49)$$

2.5 Démonstration de l'estimation a priori uniforme

La démonstration de l'estimation a priori (2.32) est une adaptation de celle de [33, Th. 2.1] et est basée sur le résultat suivant.

Théorème 2.35 *Sous l'hypothèse spectrale 2.24, il existe une constante $\delta_0 > 0$ telle que pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$, si $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$ est une solution de (2.18)-(2.19) associée à $\mathbf{F} \in \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega)$, alors*

$$\|\mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)} \quad (2.50)$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de δ .

Quant à la démonstration de l'estimation a priori (2.34), elle est basée sur le résultat suivant.

Théorème 2.36 *Sous l'hypothèse spectrale 2.26, il existe une constante $\delta_1 > 0$ telle que pour tout $\delta \in (0, \delta_1)$, si $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_N(\Omega, \delta)$ est une solution de (2.25)-(2.26) associée à $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$, alors*

$$\|\mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)} \quad (2.51)$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de δ .

Démonstration du théorème 2.35

La preuve donnée ici utilise l'injection compacte de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ (Théorème de Rellich). Fixons $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$ une solution de (2.18)-(2.19). Ainsi, avec des notations évidentes, pour tout $\Phi \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} (\text{rot } \mathbf{E}_\delta, \text{rot } \Phi)_{0,\Omega} + \alpha (\text{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta), \text{div}(\varepsilon(\delta) \Phi))_{0,\Omega} - \frac{\kappa^2}{\mu} (\mathbf{E}_\delta, \Phi)_{0,\Omega} - \frac{1}{\mu} \frac{i}{\delta^2} (\mathbf{E}_\delta, \Phi)_{0,\Omega} \\ = (\mathbf{F}, \Phi)_{0,\Omega} - \frac{\alpha}{\kappa^2} (\text{div } \mathbf{F}, \text{div}(\varepsilon(\delta) \Phi))_{0,\Omega} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Or, d'après le théorème 2.21,

$$\text{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) + \frac{1}{\kappa^2} \text{div } \mathbf{F} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

Ainsi, pour tout $\Phi \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$,

$$(\text{rot } \mathbf{E}_\delta, \text{rot } \Phi)_{0,\Omega} - \kappa^2 (\mathbf{E}_\delta, \Phi)_{0,\Omega} - \frac{i}{\delta^2} (\mathbf{E}_\delta, \Phi)_{0,\Omega_{\text{cd}}} = \mu (\mathbf{F}, \Phi)_{0,\Omega} \quad (2.53)$$

Pour démontrer ce théorème, on raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe une suite $(\mathbf{F}_{\delta_n})_{n \geq 1}$ dans $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ où $\delta_n \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, telle que $\|\mathbf{F}_{\delta_n}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)} = 1$ et $\mathbf{F}_{\delta_n} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, et telle que la solution correspondante $\mathbf{E}_{\delta_n} \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta_n)$ vérifie

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{E}_{\delta_n}\|_{0,\Omega} = +\infty.$$

Utilisons la notation \sim pour désigner la division par $\|\mathbf{E}_{\delta_n}\|_{0,\Omega}$, de sorte que $\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n} = \frac{\mathbf{E}_{\delta_n}}{\|\mathbf{E}_{\delta_n}\|_{0,\Omega}}$. Ainsi,

$$\|\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n}\|_{0,\Omega} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{\mathbf{F}}_{\delta_n}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)} = 0. \quad (2.54)$$

Preuve que $(\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n})_{n \geq 1}$ est bornée dans $\mathbf{H}^1(\Omega_{\text{is}})$ et $\mathbf{H}^1(\Omega_{\text{cd}})$

PREUVE. D'après (2.53), pour $\Phi = \tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n}$, il vient

$$\|\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n}\|_{0,\Omega}^2 - \kappa^2 \|\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n}\|_{0,\Omega}^2 - \frac{i}{\delta_n^2} \|\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n}\|_{0,\Omega_{\text{cd}}}^2 = \mu(\tilde{\mathbf{F}}_{\delta_n}, \tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n})_{0,\Omega} \quad (2.55)$$

En identifiant les parties imaginaires de chacun des membres de cette égalité, on a

$$\frac{1}{\delta_n^2} \|\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n}\|_{0,\Omega_{\text{cd}}}^2 = -\text{Im}(\tilde{\mathbf{F}}_{\delta_n}, \tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n})_{0,\Omega} \quad (2.56)$$

Ainsi d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz et (2.54),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n}\|_{0,\Omega_{\text{cd}}} = 0 \quad (2.57)$$

De même, en identifiant les parties réelles de chacun des membres de (2.55), il vient

$$\|\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n}\|_{0,\Omega}^2 - \kappa^2 \|\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n}\|_{0,\Omega}^2 = \mu \text{Re}(\tilde{\mathbf{F}}_{\delta_n}, \tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n})_{0,\Omega} \quad (2.58)$$

Ainsi, d'après (2.54), il existe des constantes C_1 et $C_2 > 0$ indépendantes de n telles que

$$\|\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n}\|_{0,\Omega}^2 \leq C_1 + C_2 \|\tilde{\mathbf{F}}_{\delta_n}\|_{0,\Omega} \quad (2.59)$$

Donc, $(\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n})_{n \geq 1}$ est bornée dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. Soit $(\mathbf{w}_{\delta_n}, \varphi_{\delta_n}) \in \mathbf{X}_{\mathbf{T}}(\Omega) \times V$, donnés par les théorèmes 2.29 et 2.31, tel que

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n} = \tilde{\mathbf{w}}_{\delta_n} + \nabla \tilde{\varphi}_{\delta_n} \quad \text{et} \quad \text{div } \tilde{\mathbf{w}}_{\delta_n} = 0 \quad \text{dans } \Omega$$

et

$$\|\tilde{\mathbf{w}}_{\delta_n}\|_{1,\Omega} \leq C \|\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n}\|_{0,\Omega} \quad (2.60)$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de δ_n . Donc, $(\tilde{\mathbf{w}}_{\delta_n})_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathbf{H}^1(\Omega)$. D'après le lemme 2.33 et d'après (2.20), il vient $\tilde{\varphi}_{\delta_n}$ vérifie $\forall \psi \in V$,

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\delta_n) \nabla \tilde{\varphi}_{\delta_n} \cdot \overline{\nabla \psi} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\kappa^2} \int_{\Omega} \text{div } \tilde{\mathbf{F}}_{\delta_n} \bar{\psi} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\mu} \frac{i}{\delta_n^2} \int_{\Sigma} \tilde{\mathbf{w}}_{\delta_n} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma} \bar{\psi} \, ds \quad (2.61)$$

Soient $\rho_0 > 0$ et $C_{\rho_0} > 0$ les constantes données par le théorème 1.3, voir chapitre 1. On pose $\rho_n = 1 + \frac{i}{\delta_n^2}$. Il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|\rho_n| \geq \rho_0$. Les données $\text{div } \tilde{\mathbf{F}}_{\delta_n}$ et $\tilde{\mathbf{w}}_{\delta_n} \cdot \mathbf{n}$ vérifient les hypothèses du théorème 1.3. De plus, le problème (2.61) est coercif sur V , donc la solution $\tilde{\varphi}_{\delta_n}$ de (2.61) appartient à $\text{PH}^2(\Omega)$ et vérifie l'estimation suivante pour tout $n \geq n_0$

$$\|\tilde{\varphi}_{\delta_n}^{\text{is}}\|_{2,\Omega_{\text{is}}} + \|\tilde{\varphi}_{\delta_n}^{\text{cd}}\|_{2,\Omega_{\text{cd}}} \leq C_{\rho_0} (\|\text{div } \tilde{\mathbf{F}}_{\delta_n}\|_{0,\Omega} + \|\tilde{\mathbf{w}}_{\delta_n} \cdot \mathbf{n}\|_{\frac{1}{2},\Sigma}).$$

Ainsi, la suite $(\nabla \tilde{\varphi}_{\delta_n})_{n \geq 1}$ est bornée dans l'espace $\mathbf{PH}^1(\Omega)$ des fonctions vectorielles \mathbf{H}^1 par sous-domaines. Par suite, $(\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n})_{n \geq 1}$ est bornée dans $\mathbf{H}^1(\Omega_{\text{is}})$ et $\mathbf{H}^1(\Omega_{\text{cd}})$. ■

Le domaine Ω est borné et régulier. Donc, d'après le théorème de Rellich l'injection canonique de l'espace $\mathbf{PH}^1(\Omega)$ dans l'espace $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte. On peut donc extraire de la suite $(\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n})_{n \geq 1}$ une sous-suite encore notée $(\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n})_{n \geq 1}$, et il existe $\tilde{\mathbf{E}} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n} \rightharpoonup \tilde{\mathbf{E}} & \text{dans } \mathbf{PH}^1(\Omega) \\ \tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n} \rightarrow \tilde{\mathbf{E}} & \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega) \end{cases} \quad (2.62)$$

D'après (2.54), il vient

$$\|\tilde{\mathbf{E}}\|_{0,\Omega} = 1 \quad (2.63)$$

Pour aboutir à une contradiction, on va démontrer que $\tilde{\mathbf{E}} = 0$ dans Ω_{is} et Ω_{cd} . D'après (2.57), $\|\tilde{\mathbf{E}}\|_{0,\Omega_{\text{cd}}} = 0$. Donc,

$$\tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\text{cd}} \quad (2.64)$$

Soit $\Phi \in \mathbf{X}_{\mathbf{T}}(\Omega, \delta_n)$ à support dans Ω_{is} . Alors, $\Phi|_{\Omega_{\text{is}}} \in \mathbf{X}_{\mathbf{TN}}(\Omega_{\text{is}})$ et d'après (2.53), on a

$$(\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n}, \text{rot } \Phi)_{0,\Omega_{\text{is}}} - \kappa^2 (\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n}, \Phi)_{0,\Omega_{\text{is}}} = \mu (\tilde{\mathbf{F}}_{\delta_n}, \Phi)_{0,\Omega_{\text{is}}} \quad (2.65)$$

D'après (2.62) en passant à la limite quand $n \rightarrow +\infty$, on en déduit que

$$(\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}, \text{rot } \Phi)_{0,\Omega_{\text{is}}} - \kappa^2 (\tilde{\mathbf{E}}, \Phi)_{0,\Omega_{\text{is}}} = 0. \quad (2.66)$$

D'après l'hypothèse spectrale 2.24, on en déduit que

$$\tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}} \quad (2.67)$$

Par suite,

$$\tilde{\mathbf{E}} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (2.68)$$

ce qui est en contradiction avec (2.63). Par suite, (2.50) est vérifiée.

Démonstration du Théorème 2.25

Soit $\delta_0 > 0$ donnée par le théorème 2.35. On suppose qu'il existe une solution \mathbf{E}_δ du problème (2.18)-(2.19). Alors \mathbf{E}_δ est solution de la formulation variationnelle (2.53). On choisit $\Phi = \mathbf{E}_\delta$ comme fonction test dans (2.53), de sorte que

$$\|\text{rot } \mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega}^2 - \kappa^2 \|\mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega}^2 - \frac{i}{\delta^2} \|\mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega_{\text{cd}}}^2 = \mu (\mathbf{F}, \mathbf{E}_\delta)_{0,\Omega} \quad (2.69)$$

En prenant à nouveau successivement les parties imaginaires et réelles des deux membres de cette égalité, d'après l'estimation du théorème 2.35, on en déduit que

$$\frac{1}{\delta} \|\mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega_{\text{cd}}} \leq C_1 \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}(\text{div},\Omega)} \quad (2.70)$$

puis

$$\|\operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} \leq C_2 \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div},\Omega)} \quad (2.71)$$

Enfin, d'après le théorème 2.21,

$$\operatorname{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) = -\frac{1}{\kappa^2} \operatorname{div} \mathbf{F} \quad \text{dans } \Omega \quad (2.72)$$

Par suite, l'estimation (2.32) est vérifiée.

Démonstration de l'existence et de l'unicité d'une solution du problème (2.18)

L'estimation a priori (2.32) implique l'injectivité de l'opérateur sous-jacent au problème variationnel (2.18). Il suffit donc de démontrer que cet opérateur est surjectif. On introduit la forme sesquilinéaire c_δ définie pour tout $\mathbf{E}_\delta, \mathbf{E}'_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{T}(\Omega, \delta)$ par

$$c_\delta(\mathbf{E}_\delta, \mathbf{E}'_\delta) = \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{E}'_\delta} + \beta \operatorname{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) \operatorname{div}(\overline{\varepsilon(\delta) \mathbf{E}'_\delta}) \right) d\mathbf{x} \quad (2.73)$$

On peut démontrer que c_δ est coercive sur $\mathbf{X}_\mathbf{T}(\Omega, \delta)$, voir [4, Corollary 3.16]. D'après le théorème de Lax-Milgram, on en déduit que l'opérateur

$$\begin{aligned} C_\delta : \mathbf{X}_\mathbf{T}(\Omega, \delta) &\rightarrow \mathbf{X}_\mathbf{T}(\Omega, \delta)' \\ \mathbf{E}_\delta &\mapsto c_\delta(\mathbf{E}_\delta, \cdot) \end{aligned}$$

est un isomorphisme. En particulier, C_δ est un opérateur de Fredholm. Soit I_δ l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} I_\delta : \mathbf{X}_\mathbf{T}(\Omega, \delta) &\rightarrow \mathbf{X}_\mathbf{T}(\Omega, \delta)' \\ \mathbf{E}_\delta &\mapsto \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta \end{aligned}$$

C'est un opérateur compact. Donc, l'opérateur $C_\delta - \kappa^2 I_\delta$ est un opérateur de Fredholm. En particulier, il est surjectif si et seulement si son opérateur adjoint $C_\delta^* - \kappa^2 I_\delta^*$ est injectif. Soit c_δ^* la forme sesquilinéaire associée à l'opérateur C_δ^* . Alors, pour tout $\mathbf{E}_\delta, \mathbf{E}'_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{T}(\Omega, \delta)$ on a

$$c_\delta^*(\mathbf{E}_\delta, \mathbf{E}'_\delta) = \int_\Omega \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta \cdot \operatorname{rot} \overline{\mathbf{E}'_\delta} + \beta \operatorname{div}(\overline{\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta}) \operatorname{div}(\varepsilon(\delta) \overline{\mathbf{E}'_\delta}) \right) d\mathbf{x}. \quad (2.74)$$

De plus,

$$I_\delta^* = \overline{\varepsilon(\delta)} \mathbb{I}.$$

Donc, d'une façon similaire au théorème 2.25, on peut démontrer une estimation a priori pour le problème associé à l'opérateur $C_\delta^* - \kappa^2 I_\delta^*$. Ceci prouve l'injectivité de l'opérateur $C_\delta^* - \kappa^2 I_\delta^*$, et donc la surjectivité de l'opérateur $C_\delta - \kappa^2 I_\delta$.

Démonstration du Théorème 2.27

La démonstration est similaire à celle du théorème 2.25 et utilise le théorème 2.22.

PREUVE. La démonstration est une adaptation de celle de [33, Th. 2.2] et utilise l'estimation a priori du théorème 2.25. ■

2.6 Cas d'une interface polyédrale

On suppose à présent que Ω_{is} est un polyèdre curviligne, voir [18], et que Ω un domaine polyédral Lipschitzien, voir [4]. Grâce aux estimations du théorème 1.8 (voir chapitre 1) on démontre que le théorème 2.25 est encore vrai. Les résultats principaux de ce paragraphe sont les suivants.

Théorème 2.37 *Sous l'hypothèse spectrale 2.24, il existe une constante $\delta_0 > 0$ telle que pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$, le problème (2.18)-(2.19) admet une unique solution $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$ associée à $\mathbf{F} \in \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega)$ sur $\partial\Omega$, et qui de plus vérifie l'estimation*

$$\|\text{rot } \mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} + \|\text{div } \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\delta} \|\mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega_{cd}} \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)} \quad (2.75)$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de δ .

Théorème 2.38 *Sous l'hypothèse spectrale 2.26, il existe une constante $\delta_1 > 0$ telle que pour tout $\delta \in (0, \delta_1)$, le problème (2.25)-(2.26) admet une unique solution $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_N(\Omega, \delta)$ associée à $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$, et qui de plus vérifie l'estimation*

$$\|\text{rot } \mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} + \|\text{div } \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\delta} \|\mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega_{cd}} \leq C \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)} \quad (2.76)$$

où $C > 0$ est une constante indépendante de δ .

Pour démontrer ces théorèmes, on utilise une technique de potentiel vecteur dans un domaine non-régulier, voir le paragraphe 2.6.1.

2.6.1 Potentiel vecteur dans un domaine non-régulier

On utilise le résultat suivant, voir [4, Proposition 3.7].

Proposition 2.39 *Si le domaine Ω est polyédral Lipschitzien, il existe un réel $s > \frac{1}{2}$ tel que les injections de $\mathbf{X}_T(\Omega)$ et $\mathbf{X}_N(\Omega)$ dans $\mathbf{H}^s(\Omega)$ sont continues.*

On fixe un tel réel $s > \frac{1}{2}$ à présent. A partir de la proposition précédente, on démontre facilement un résultat similaire à celui des théorèmes 2.29 et 2.31.

Théorème 2.40 Soient $s > \frac{1}{2}$ et $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{T}(\Omega, \delta)$. Alors, il existe un unique couple $(\mathbf{w}_\delta, \varphi_\delta) \in \mathbf{X}_\mathbf{T}(\Omega) \times V$ tel que

$$\mathbf{E}_\delta = \mathbf{w}_\delta + \nabla \varphi_\delta \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{w}_\delta = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \quad (2.77)$$

De plus, $\mathbf{w}_\delta \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ et il existe une constante $C > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|\mathbf{w}_\delta\|_{s,\Omega} \leq C \|\operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega}. \quad (2.78)$$

Remarque 2.41 Seule l'estimation (2.78) diffère du cas où Ω est un domaine régulier, voir l'estimation (2.39).

De même, on a le résultat suivant, comparer avec 2.30 et 2.32.

Théorème 2.42 Soient $s > \frac{1}{2}$ et $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{N}(\Omega, \delta)$. Alors, il existe un unique couple $(\mathbf{w}_\delta, \varphi_\delta) \in \mathbf{X}_\mathbf{N}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ tel que

$$\mathbf{E}_\delta = \mathbf{w}_\delta + \nabla \varphi_\delta \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \mathbf{w}_\delta = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega. \quad (2.79)$$

De plus, $\mathbf{w}_\delta \in \mathbf{H}^s(\Omega)$ et il existe une constante $C > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|\mathbf{w}_\delta\|_{s,\Omega} \leq C \|\operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta\|_{0,\Omega}. \quad (2.80)$$

2.6.2 Démonstration des estimations a priori

On démontre ici le théorème 2.37. Il suffit d'adapter la démonstration du théorème 2.35 au cas où Σ est polyédrale et Ω polyédral. On raisonne encore par l'absurde et on définit une suite $(\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n})_{n \geq 1}$ d'éléments de $\mathbf{X}_\mathbf{T}(\Omega, \delta_n)$, voir la démonstration du théorème 2.35.

Preuve qu'il existe $s > \frac{1}{2}$ tel que $(\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n})_{n \geq 1}$ est bornée dans $\mathbf{H}^s(\Omega_{\text{is}})$ et $\mathbf{H}^s(\Omega_{\text{cd}})$

PREUVE. De la même façon que dans le cas régulier, $(\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n})_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$. D'après le théorème 2.40, il existe $(\mathbf{w}_{\delta_n}, \varphi_{\delta_n}) \in \mathbf{X}_\mathbf{T}(\Omega) \times V$, tel que

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n} = \tilde{\mathbf{w}}_{\delta_n} + \nabla \tilde{\varphi}_{\delta_n} \quad \text{et} \quad \operatorname{div} \tilde{\mathbf{w}}_{\delta_n} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega$$

et il existe $s > \frac{1}{2}$ et une constante $C > 0$ indépendante de δ_n tel que

$$\|\tilde{\mathbf{w}}_{\delta_n}\|_{s,\Omega} \leq C \|\operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n}\|_{0,\Omega} \quad (2.81)$$

Donc, $(\tilde{\mathbf{w}}_{\delta_n})_{n \in \mathbf{N}}$ est bornée dans $\mathbf{H}^s(\Omega)$. De façon similaire au lemme 2.33 et d'après (2.20), on prouve que $\tilde{\varphi}_{\delta_n}$ vérifie $\forall \psi \in V$,

$$\int_{\Omega} \varepsilon(\delta_n) \nabla \tilde{\varphi}_{\delta_n} \cdot \overline{\nabla \psi} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\kappa^2} \int_{\Omega} \operatorname{div} \tilde{\mathbf{F}}_{\delta_n} \, \bar{\psi} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{\mu} \frac{i}{\delta_n^2} \int_{\Sigma} \tilde{\mathbf{w}}_{\delta_n} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma} \, \bar{\psi} \, ds \quad (2.82)$$

Soient $s_0 > \frac{1}{2}$, $\rho_0 > 0$ et $C_{\rho_0, s} > 0$ les constantes données par le théorème 1.8, voir chapitre 1. On pose $\rho_n = 1 + \frac{i}{\delta_n^2}$. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on a $|\rho_n| \geq \rho_0$. Les données vérifient les hypothèses du théorème 1.8 car

$$\operatorname{div} \tilde{\mathbf{F}}_{\delta_n} \in H^{s-1}(\Omega) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{w}}_{\delta_n} \cdot \mathbf{n} \in H^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma)$$

De plus, le problème (2.82) est coercif sur V . Donc, d'après le théorème 1.8, la solution $\tilde{\varphi}_{\delta_n}$ de (2.82) appartient à $\mathbf{PH}^{s+1}(\Omega)$ si $s \in (\frac{1}{2}, s_0)$, et vérifie l'estimation suivante pour tout $n \geq n_0$

$$\|\tilde{\varphi}_{\delta_n}^{\text{is}}\|_{s+1, \Omega_{\text{is}}} + \|\tilde{\varphi}_{\delta_n}^{\text{cd}}\|_{s+1, \Omega_{\text{cd}}} \leq C_{\rho_0, s} (\|\operatorname{div} \tilde{\mathbf{F}}_{\delta_n}\|_{s-1, \Omega} + \|\tilde{\mathbf{w}}_{\delta_n} \cdot \mathbf{n}\|_{s-\frac{1}{2}, \Sigma}).$$

Ainsi, $(\nabla \tilde{\varphi}_{\delta_n})_{n \geq 1}$ est bornée dans l'espace $\mathbf{PH}^s(\Omega)$ des fonctions vectorielles \mathbf{H}^s par sous-domaines. Par suite, $(\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n})_{n \geq 1}$ est bornée dans $\mathbf{H}^s(\Omega_{\text{is}})$ et $\mathbf{H}^s(\Omega_{\text{cd}})$ pour un réel $s > \frac{1}{2}$. ■

Le domaine Ω est borné et lipschitzien, donc d'après le théorème de Rellich, l'injection de $\mathbf{H}^s(\Omega)$ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ est compacte car $s > 0$. On peut donc extraire de $(\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n})_{n \geq 1}$ une sous-suite encore notée $(\tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n})_{n \geq 1}$, et il existe $\tilde{\mathbf{E}} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n} \rightharpoonup \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{E}} & \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega) \\ \tilde{\mathbf{E}}_{\delta_n} \rightarrow \tilde{\mathbf{E}} & \text{dans } \mathbf{L}^2(\Omega) \end{cases} \quad (2.83)$$

La fin de la démonstration est similaire au cas régulier : on démontre que $\tilde{\mathbf{E}} = 0$ et on aboutit à une contradiction. Enfin, la démonstration du théorème 2.38 est similaire à celle-ci et utilise le théorème 2.42.

2.6.3 Décroissance exponentielle intérieure de la solution

Dans ce paragraphe, on donne un premier résultat de décroissance exponentielle inversement proportionnel au petit paramètre δ du champ électromagnétique dans un domaine strictement inclus dans Ω_{cd} , voir [33]. Ce résultat exprime en particulier que le champ électromagnétique se concentre dans Ω_{cd} au voisinage de l'interface Σ .

Théorème 2.43 *Soit $\eta > 0$ assez petit tel que $\mathcal{O}_{\text{cd}}^\eta = \{\mathbf{x} \in \Omega_{\text{cd}} \mid \operatorname{dist}(\mathbf{x}, \Sigma) > \eta\}$ soit non-vide. Il existe deux constantes positives C_η et c_η indépendantes de δ telles que si \mathbf{E}_δ est une solution du problème (2.14) associée à une donnée $\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$ et si $\mathbf{H}_\delta = \frac{1}{i\omega\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta$, alors*

$$\|\mathbf{E}_\delta\|_{\mathbf{H}(\operatorname{rot}, \mathcal{O}_{\text{cd}}^\eta)} + \|\mathbf{H}_\delta\|_{\mathbf{H}(\operatorname{rot}, \mathcal{O}_{\text{cd}}^\eta)} \leq C_\eta \exp\left(-\frac{c_\eta}{\delta}\right) \|\mathbf{F}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)}.$$

PREUVE. La démonstration est une adaptation de la preuve du résultat [34, Th. 2.2] au cas où l'interface Σ est polyédrale. ■

Chapitre 3

Equations de Maxwell en coordonnées normales

3.1 Introduction

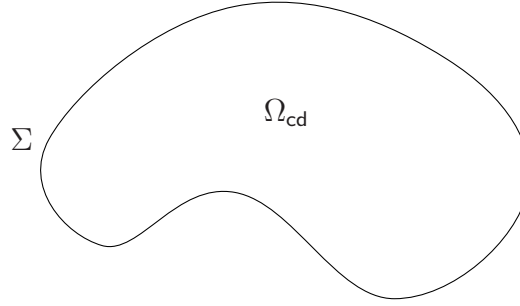
L'objet de ce troisième chapitre consiste à réécrire les équations de Maxwell dans des coordonnées issues d'un voisinage tubulaire de l'interface dans le domaine conducteur. On introduit un système de coordonnées adapté à l'analyse asymptotique du champ électromagnétique lorsque le petit paramètre $\delta \rightarrow 0$, voir chapitre 2. Le passage dans ce système de coordonnées dites "normales" nécessite l'utilisation d'objets définis de façon générale sur des variétés riemanniennes, voir [25].

Le plan de ce chapitre est le suivant. On présente le problème et on définit un voisinage tubulaire de l'interface au paragraphe 3.2. Puis, dans la section 3.3, on introduit les coordonnées normales et on rappelle quelques règles d'emploi d'objets, telle la dérivée covariante, liés à ces coordonnées. On définit ensuite les opérateurs Divergence et Rotationnel dans ce système de coordonnées, voir paragraphe 3.4. Enfin, dans une dernière section, on démontre la réduction normale des équations de Maxwell en champ électrique, voir théorème 3.47.

3.2 Présentation du problème

3.2.1 Les équations en champ électrique

Soit Ω_{cd} un domaine borné, régulier et simplement connexe de \mathbb{R}^3 . On appelle Σ sa frontière, qu'on suppose de classe \mathcal{C}^∞ .

Le domaine Ω_{cd}

On rappelle que l'équation de Maxwell homogène d'ordre 2 en champ électrique \mathbf{E}_δ à petit paramètre $\delta > 0$ et posée dans le domaine conducteur Ω_{cd} s'écrit de la façon suivante en coordonnées cartésiennes

$$\text{rot rot } \mathbf{E}_\delta^{cd} - \kappa^2 \left(1 + \frac{i}{\delta^2}\right) \mathbf{E}_\delta^{cd} = \mu \mathbf{F}^{cd} \quad \text{dans } \Omega_{cd} \quad (3.1)$$

voir les équations (2.8) au chapitre 2. De plus, d'après le système (2.8), les conditions de transmission du champ électrique à travers l'interface Σ s'écrivent

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\delta^{cd} \times \mathbf{n} &= \mathbf{E}_\delta^{is} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \\ \text{rot } \mathbf{E}_\delta^{cd} \times \mathbf{n} &= \text{rot } \mathbf{E}_\delta^{is} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.2)$$

où on rappelle que le terme \mathbf{E}_δ^{is} désigne la restriction de \mathbf{E}_δ au domaine Ω_{is} , voir le paragraphe 2.2. Dans la suite de ce chapitre, on suppose que $\mathbf{F}^{cd} = 0$ dans le domaine Ω_{cd} . Ainsi, d'après l'identité (2.10), on a la relation supplémentaire

$$\text{div } \mathbf{E}_\delta^{cd} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{cd}. \quad (3.3)$$

On rappelle enfin que la trace normale sur l'interface Σ de \mathbf{E}_δ^{cd} est discontinue, voir (2.12). Précisément, on a

$$\left(1 + \frac{i}{\delta^2}\right) \mathbf{E}_\delta^{cd} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{E}_\delta^{is} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (3.4)$$

Pour ne pas alourdir les notations, on notera plus simplement \mathbf{E} à la place de \mathbf{E}_δ^{cd} dans la suite de ce chapitre.

Soit $\{x^i\}$ un système de coordonnées cartésiennes de \mathbb{R}^3 , et $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$ la base canonique de \mathbb{R}^3 . Cette notation en dérivée partielle fait référence à la structure de variété de \mathbb{R}^3 . On considère à présent \mathbf{E} comme un champ de vecteurs défini dans Ω_{cd} . En utilisant la convention de sommation des indices répétés, on note

$$\mathbf{E} = E^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Les composantes E^i du champ électrique sont des composantes dites contravariantes. On note aussi E_i les composantes covariantes de \mathbf{E} dans la base duale de $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}$. Alors on a l'identité

$$E_i = E^i$$

car la métrique est plate dans ce système de coordonnées. Dans la suite, ∂_i désigne la dérivée partielle dans la direction x^i . Dans la proposition suivante, on reformule les équations de Maxwell du système (3.1) sous forme tensorielle en coordonnées cartésiennes.

Proposition 3.1 *Soit \mathbf{E} une solution de l'équation (3.1). Alors, pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, on a*

$$\partial_j \sum_{k=1}^3 \partial_k E_k - \sum_{k=1}^3 \partial_k^2 E_j - \kappa^2 \left(1 + \frac{i}{\delta^2}\right) E_j = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\text{cd}} \quad (3.5)$$

De plus, on a la relation

$$\sum_{k=1}^3 \partial_k E_k = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\text{cd}}.$$

PREUVE. On a

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \nabla \text{div } \mathbf{E} - \Delta \mathbf{E}$$

donc pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$,

$$(\text{rot rot } \mathbf{E})_j = \partial_j \text{div } \mathbf{E} - \Delta E_j \quad (3.6)$$

où Δ désigne l'opérateur de Laplace dans les coordonnées cartésiennes $\{x^i\}$. On en déduit la proposition car

$$\text{div } \mathbf{E} = \sum_{k=1}^3 \partial_k E_k \quad \text{et} \quad \Delta E_j = \sum_{k=1}^3 \partial_k^2 E_j. \quad (3.7)$$

■

Les coordonnées cartésiennes sont bien adaptées à l'étude des équations de Maxwell (3.1) et (3.2) lorsque $\delta \rightarrow 0$ uniquement lorsque l'interface Σ est plane, voir [62]. L'objet de ce chapitre est d'écrire les équations (3.1) et (3.2) dans un système de coordonnées adapté à l'analyse asymptotique des solutions de ces équations dans un voisinage tubulaire de l'interface.

3.2.2 Voisinage tubulaire de l'interface

La surface Σ est orientable, donc il existe globalement un champ de vecteur normal unitaire \mathbf{n} sur Σ . Précisément, $\mathbf{n}(P)$ désigne la normale en $P \in \Sigma$ rentrante dans Ω_{cd} . Dans la suite, on identifiera un point P de Σ avec son image par le plongement isométrique dans \mathbb{R}^3 . Soit Ψ l'application

$$\begin{aligned} \Psi : \Sigma \times (0, \eta) &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (P, h) &\mapsto P + h \mathbf{n}(P) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Pour $\eta > 0$ assez petit, on définit un voisinage tubulaire de Σ d'épaisseur η , par l'image de la variété produit $\Sigma \times (0, \eta)$ via l'application Ψ . Précisément, on note

$$\mathcal{O} = \Psi(\Sigma \times (0, \eta))$$

ce voisinage tubulaire. La variété Σ est compacte, donc il existe un réel $\eta_0 > 0$ assez petit tel que pour tout $\eta \leq \eta_0$, $\Psi : \Sigma \times (0, \eta) \rightarrow \mathcal{O}$ soit un difféomorphisme entre la variété produit et son image. A présent, on fixe un réel $\eta \leq \eta_0$. Ainsi, \mathcal{O} est un ouvert de \mathbb{R}^3 qui admet deux paramétrisations naturelles : celle issue de l'espace ambiant et celle issue du difféomorphisme Ψ . Dans la suite, on notera Σ_h la surface de \mathbb{R}^3 définie comme étant l'image de Σ par l'application $\Psi(\cdot, h)$

$$\Sigma_h = \Psi(\Sigma, h)$$

Ainsi, h représente la distance de Σ_h à la surface moyenne $\Sigma \times \{0\}$, voir Figure 1.

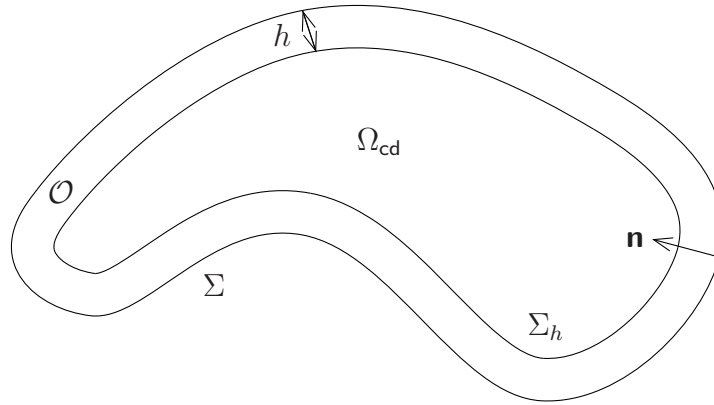


Figure 1 – Un voisinage tubulaire de Σ

On définit au paragraphe suivant un système de coordonnées normales, adapté à l'étude asymptotique des équations (3.1) et (3.2). Le passage dans ce système de coordonnées normales nécessite l'utilisation d'objets (tenseur métrique, symboles de Christoffel, tenseur de courbure, connexion, \dots) définis de façon générale sur des variétés riemanniennes, voir [25]. A ce titre, on rappellera aussi quelques règles d'emploi.

3.3 Coordonnées normales et Tenseurs

Dans la suite, les indices latins feront toujours références aux indices $(1, 2, 3)$, alors que les indices grecs feront références aux indices $(1, 2)$.

3.3.1 Coordonnées normales

Le difféomorphisme Ψ de l'équation (3.8) est appelé la paramétrisation normale de \mathcal{O} .

Définition 3.2 *Un système de coordonnées normales est un système de coordonnées sur $\mathcal{O} = \Psi(\Sigma \times (0, \eta))$ induit par un système de coordonnées sur Σ .*

Soit (y_α) un système de coordonnées associé à une carte locale de Σ . Le système de coordonnées locales tridimensionnel sur \mathcal{O}

$$(y_\alpha, y_3), \quad \text{où } y_3 \in (0, \eta)$$

est un système de coordonnées normales, noté aussi (y_i) . Pour ne pas alourdir les notations, et parce que y_3 a une existence globale dans \mathcal{O} on notera le plus souvent la troisième coordonnée

$$h = y_3.$$

On note aussi

$$\frac{\partial}{\partial y_i} = X_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}$$

les champs de vecteurs coordonnées sous-jacents. Alors,

$$X_3(y_\alpha, h) = \mathbf{n}(y_\alpha)$$

et les vecteurs $X_\alpha(y_\alpha, h)$ sont tangents à Σ_h .

Tenseur métrique et tenseur de courbure

Dans ce système de coordonnées, la métrique sur \mathcal{O} est un champ de tenseurs symétrique défini positif, noté g , dont les composantes sont définies par

$$g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

Remarque 3.3 *Le tenseur métrique de composantes g_{ij} dépend de h .*

Pour h fixé, la surface Σ_h est plongée dans le domaine \mathcal{O} de \mathbb{R}^3 , et la métrique de Σ_h est la restriction de la métrique g_{ij} à Σ_h , ce que l'on note $a_{\alpha\beta}(h)$. On a donc

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{\alpha\beta}(h) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{dans } \mathcal{O} \quad (3.9)$$

car \mathbf{n} est orthogonal à la base de vecteurs (X_α) du plan tangent à Σ_h et unitaire. Dans la suite, \mathbf{g} désigne le déterminant de la matrice de terme général g_{ij} . D'après l'identité (3.9), il vient

$$\mathbf{g} = \det(a_{\alpha\beta}(h)) > 0.$$

Les symboles de Christoffel dans le système de coordonnées normales (y_i) sont définis par la formule suivante, voir [26]

$$\Gamma_{ij}^k(h) = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}) \quad (3.10)$$

où g^{kl} désigne l'inverse du tenseur métrique. En particulier, lorsque la base (X_i) est orthonormée, les symboles de Christoffel sont identiquement nuls. On rappelle enfin la définition du tenseur de courbure sur Σ_h .

Définition 3.4 On appelle tenseur de courbure sur Σ_h , le champ de tenseur noté b , dont les composantes s'écrivent

$$b_{\alpha\beta}(h) = \Gamma_{\alpha\beta}^3(h).$$

Ainsi, d'après la relation (3.10), il vient

$$b_{\alpha\beta}(h) = -\frac{1}{2} \partial_3 g_{\alpha\beta}(h). \quad (3.11)$$

3.3.2 Dérivées covariantes

Soit ∇ la connexion sur \mathcal{O} associée au produit scalaire euclidien sur \mathbb{R}^3 , voir [25]. On note D^h la connexion sur Σ_h induite par ∇ . Dans la suite, pour toute variété $S \in \{\mathcal{O}, \Sigma_h\}$ et $(p, q) \in \mathbb{N}$, on notera $\Gamma(T_p^q S)$ l'espace des champs de tenseurs de type (p, q) sur S . On note ∂_3^h et ∂_α les dérivées partielles par rapport à h et y_α . Enfin, dy^i désigne la base duale de X^i .

On considère à présent le champ électrique \mathbf{E} comme une 1-forme tridimensionnelle définie dans \mathcal{O} . Par abus de notation, on note encore E_i les composantes de $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1 \mathcal{O})$ dans la base dy^i en coordonnées normales. En utilisant la convention de sommation des indices répétés, on écrit

$$\mathbf{E} = E_i dy^i.$$

Les composantes E_i du champ électrique sont des composantes dites covariantes. Le tenseur $\nabla \mathbf{E}$ s'appelle la dérivée covariante de \mathbf{E} . Dans une carte locale, les composantes du tenseur $\nabla \mathbf{E}$ s'écrivent

$$\nabla_i E_j = \partial_i E_j - \Gamma_{ij}^k(h) E_k.$$

On définit plus généralement la dérivée covariante d'un tenseur de type (s, r) .

Définition 3.5 Soit $A \in \Gamma(T_s^r \mathcal{O})$. Alors ∇A est un tenseur dont les composantes dans une carte s'écrivent

$$\begin{aligned} \nabla_k A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = & \partial_k A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} + \Gamma_{lk}^{i_1} A_{j_1 \dots j_s}^{l \dots i_r} + \dots + \Gamma_{lk}^{i_r} A_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots l} \\ & - \Gamma_{j_1 k}^l A_{l \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} - \dots - \Gamma_{j_s k}^l A_{j_1 \dots l}^{i_1 \dots i_r} \end{aligned} \quad (3.12)$$

où, par abus de notation, ∂_k désigne ∂_3^h si $k = 3$.

Le tenseur $D^h \mathbf{E}$ est la dérivée covariante de $E_\alpha dy^\alpha \in \Gamma(T_1 \Sigma_h)$, et ses composantes s'écrivent

$$D_\alpha^h E_\beta = \partial_\alpha E_\beta - \Gamma_{\alpha\beta}^\gamma(h) E_\gamma.$$

Réduction normale des champs de tenseurs

Tout champ de tenseur sur \mathcal{O} peut être décomposé en une famille de champs de tenseurs sur Σ_h , voir [25]. Précisément, pour une 1-forme $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1 \mathcal{O})$, on a le résultat suivant.

Proposition 3.6 Soit $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1 \mathcal{O})$ une 1-forme tridimensionnelle sur \mathcal{O} . Alors, \mathbf{E} se décompose en une 1-forme surfacique $E_\alpha dy^\alpha \in \Gamma(T_1 \Sigma_h)$ et une fonction E_3 sur Σ_h , dépendant de h .

On verra au chapitre 4 que tout champ de tenseurs sur Σ_h peut être vu comme un champ de tenseurs sur Σ dépendant de h .

3.3.3 Propriétés de la dérivée covariante

On rappelle ci-dessous quelques propriétés vérifiées par la dérivée covariante ∇ , qu'on utilisera par la suite. On trouve le résultat suivant dans [20, (30.33), (30.34)].

Proposition 3.7 Soient A et B deux champs de tenseurs. Alors, pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$,

$$\nabla_k (A^{\dots} + B^{\dots}) = \nabla_k A^{\dots} + \nabla_k B^{\dots} \quad (3.13)$$

$$\nabla_k (A^{\dots} B^{\dots}) = \nabla_k A^{\dots} B^{\dots} + A^{\dots} \nabla_k B^{\dots} \quad (3.14)$$

Dans la suite, on utilisera les relations suivantes liant ∇ et D^h , voir [25].

Proposition 3.8 Soit $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$. Alors, les différentes composantes du tenseur $\nabla\mathbf{E}$ s'écrivent

$$\begin{cases} \nabla_3 E_3 = \partial_3^h E_3 \\ \nabla_\alpha E_3 = \partial_\alpha E_3 + b_\alpha^\beta(h) E_\beta \\ \nabla_3 E_\alpha = \partial_3^h E_\alpha + b_\alpha^\beta(h) E_\beta \\ \nabla_\alpha E_\beta = D_\alpha^h E_\beta - b_{\alpha\beta}(h) E_3 \end{cases} \quad (3.15)$$

Remarque 3.9 (i) Ces équations ne dépendent pas de la carte choisie sur Σ . Elles sont donc intrinsèques.

(ii) On peut monter et descendre les indices des champs de tenseurs grâce à la métrique sur Σ_h . Ainsi, dans la proposition 3.8, on a $b_\alpha^\beta(h) = b_{\alpha\gamma}(h)g^{\gamma\beta}(h)$, où $g^{\alpha\beta}$ est l'inverse du tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$.

Le Théorème de Ricci affirme que la dérivée covariante du tenseur métrique est nulle

$$\nabla_k g_{ij} = 0, \quad (3.16)$$

voir [20, (30.28)]. En conséquence de ce résultat, l'opération de changement de variance au moyen des g_{ij} ou g^{ij} est commutative avec la dérivée covariante.

Proposition 3.10 Pour tout $i, k \in \{1, 2, 3\}$, on a

$$\nabla_k E_i = g_{ij} \nabla_k E^j \quad \text{si } \mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O}) \quad (3.17)$$

$$\nabla_k E^i = g^{ij} \nabla_k E_j \quad \text{si } \mathbf{E} \in \Gamma(T^1\mathcal{O}). \quad (3.18)$$

Le tenseur de Riemann-Christoffel dans \mathcal{O} , voir [20, (44.5)] pour une définition, est identiquement nul. On en déduit le résultat suivant, voir [20, (§44)].

Proposition 3.11 (Dérivées covariantes d'ordre deux) Soit $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$. Alors, pour tout $i, k, l \in \{1, 2, 3\}$,

$$\nabla_k \nabla_l E_i = \nabla_l \nabla_k E_i. \quad (3.19)$$

Remarque 3.12 Dans le cas de coordonnées rectilignes, les dérivées covariantes se réduisent aux dérivées partielles et l'identité (3.19) s'écrit plus simplement

$$\partial_k \partial_l E_i = \partial_l \partial_k E_i. \quad (3.20)$$

3.3.4 Tenseurs fondamentaux

On définit dans ce paragraphe deux champs de tenseurs dans le système de coordonnées normales (y_i) précédent. Ces tenseurs permettront de reformuler les équations de Maxwell, voir la proposition 3.42.

Définition 3.13 *On appelle tenseur de changement de métrique associé à $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$, le tenseur $\gamma(\mathbf{E})$ dont les composantes dans une carte locale s'écrivent*

$$\gamma_{ij}(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}(\nabla_i E_j + \nabla_j E_i) \quad (3.21)$$

Remarque 3.14 *En élasticité, γ s'appelle le tenseur des taux de déformation.*

D'après la proposition 3.8, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 3.15 *Soit $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$. Alors*

$$\begin{cases} \gamma_{33}(h)(\mathbf{E}) = \partial_3^h E_3 \\ \gamma_{\alpha 3}(h)(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}(\partial_\alpha E_3 + \partial_3^h E_\alpha) + b_\alpha^\beta(h) E_\beta \\ \gamma_{\alpha\beta}(h)(\mathbf{E}) = \frac{1}{2}(D_\alpha^h E_\beta + D_\beta^h E_\alpha) - b_{\alpha\beta}(h) E_3 \end{cases} \quad (3.22)$$

On définit enfin le champ de tenseur de changement de courbure $\rho(h)(\mathbf{E})$ opérant sur la surface Σ_h .

Définition 3.16 *Le champ de tenseur $\rho(h)(\mathbf{E})$ deux fois covariant de changement de courbure linéarisé associé à $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$ est défini par ses composantes dans une carte*

$$\rho_{\alpha\beta}(h)(\mathbf{E}) = \nabla_\alpha \nabla_\beta E_3 + b_{\alpha\beta}(h) \nabla_3 E_3. \quad (3.23)$$

3.4 Divergence et Rotationnel en paramétrisation normale

Le but de ce paragraphe est d'écrire les opérateurs Divergence et Rotationnel dans \mathcal{O} en coordonnées normales.

3.4.1 L'opérateur Divergence

On introduit tout d'abord la notion de dérivée contravariante associée à ∇ . Ses composantes sont définies à partir de celles de la dérivée covariante ∇ contractées par l'inverse du tenseur métrique.

Définition 3.17 La dérivée contravariante de $\mathbf{E} = E_i dy^i \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$ est le tenseur dont les composantes dans une carte s'écrivent

$$\nabla^i E_j = g^{ik} \nabla_k E_j. \quad (3.24)$$

On définit à présent le tenseur Divergence associé à $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$ de la façon suivante.

Définition 3.18 Soit $\mathbf{E} = E_i dy^i \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$. Alors, le tenseur de la Divergence de \mathbf{E} est la fonction notée $\nabla \cdot \mathbf{E}$ et s'écrit dans une carte locale

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla^i E_i. \quad (3.25)$$

La proposition suivante fournit l'expression en paramétrisation normale de l'opérateur Divergence.

Proposition 3.19 Soit $\mathbf{E} = E_i dy^i \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$. Alors, pour tout $h \in (0, \eta)$, on a

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = [g^{\alpha\beta}(h) D_\beta^h E_\alpha - b_\alpha^\alpha(h) E_3] + \partial_3^h E_3 \quad (3.26)$$

PREUVE. On a

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla^\alpha E_\alpha + \nabla^3 E_3$$

Or

$$\nabla^\alpha E_\alpha = g^{\alpha\beta} \nabla_\beta E_\alpha$$

et

$$\nabla^3 E_3 = \nabla_3 E_3$$

car $g^{3i} = \delta^{3i}$. Enfin, la proposition 3.8 permet de conclure. ■

La proposition suivante exprime la divergence en paramétrisation normale à partir du tenseur de changement de métrique.

Proposition 3.20 Soit $\mathbf{E} = E_i dy^i \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$. Alors,

$$\forall h \in (0, \eta), \nabla \cdot \mathbf{E} = \gamma_\alpha^\alpha(h)(\mathbf{E}) + \partial_3^h E_3$$

PREUVE. On a

$$\gamma_\alpha^\alpha(h)(\mathbf{E}) = g^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}(h)(\mathbf{E})$$

Ainsi, d'après la proposition 3.15,

$$\gamma_\alpha^\alpha(h)(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (D_\alpha^h E_\beta + D_\beta^h E_\alpha) - g^{\alpha\beta} b_{\alpha\beta}(h) E_3$$

Or, par symétrie du tenseur métrique

$$\frac{1}{2} g^{\alpha\beta} (D_\alpha^h E_\beta + D_\beta^h E_\alpha) = g^{\alpha\beta} D_\alpha^h E_\beta$$

Donc

$$\gamma_\alpha^\alpha(h)(\mathbf{E}) = g^{\alpha\beta}(h)D_\beta^h E_\alpha - b_\alpha^\alpha(h)E_3$$

et la proposition 3.19 permet de conclure. ■

3.4.2 L'opérateur Rotationnel

Afin de définir le rotationnel dans le système de coordonnées normales précédent, on définit le symbole de Levi-Civita de la façon suivante, voir [41].

Définition 3.21 Pour toute permutation (i, j, k) de $\{1, 2, 3\}$, le symbole de Levi-Civita $\epsilon_0(i, j, k)$ est défini par

$$\epsilon_0(i, j, k) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est circulaire directe} \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est circulaire indirecte} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 3.22 Pour toute permutation (i, j, k) de $\{1, 2, 3\}$, on a

$$\epsilon_0(i, j, k) = \frac{1}{2}(i - j)(j - k)(k - i).$$

Remarque 3.23 Le symbole de Levi-Civita n'est pas un tenseur. Cependant, $\frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}}\epsilon_0(i, j, k)$ est un tenseur isotropique de rang 3, voir [32, 48]. C'est aussi un pseudo-tenseur antisymétrique sous l'effet d'une permutation de deux indices, voir [5] pour la notion de pseudo-tenseur.

Définition 3.24 On appelle tenseur de Levi-Civita, le tenseur noté ϵ dont les composantes contravariantes dans une carte s'écrivent

$$\epsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}}\epsilon_0(i, j, k).$$

Le tenseur de Levi-Civita est aussi appelé tenseur de permutation.

Le tenseur de permutation ϵ^{ijk} permet de définir dans \mathcal{O} le rotationnel en composantes contravariantes. Si \mathbf{E} est un champ de tenseur 1-fois covariant, on définit son rotationnel, noté $\nabla \times \mathbf{E}$, comme un champ de tenseur 1-fois contravariant de la façon suivante, voir [38].

Définition 3.25 Soit $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$. Alors, $\nabla \times \mathbf{E} \in \Gamma(T^1\mathcal{O})$ est le champ de tenseur dont les composantes contravariantes dans une carte s'écrivent

$$(\nabla \times \mathbf{E})^k = \epsilon^{ijk}\nabla_i E_j. \quad (3.27)$$

Afin d'écrire le rotationnel en composantes covariantes, on calcule les composantes covariantes du tenseur de Levi-Civita.

Proposition 3.26 *Pour toute permutation (n, m, l) de $\{1, 2, 3\}$, la composante covariante (n, m, l) du tenseur de Levi-Civita est*

$$\epsilon_{nml} = \sqrt{\mathbf{g}} \epsilon_0(n, m, l). \quad (3.28)$$

PREUVE. Soit (n, m, l) une permutation de $\{1, 2, 3\}$. On peut descendre les indices des champs de tenseurs grâce à la métrique sur Σ_h . Ainsi, on a

$$\epsilon_{nml} = g_{in} g_{jm} g_{kl} \epsilon^{ijk}.$$

Par définition de ϵ^{ijk} , il vient

$$\epsilon_{nml} = g_{in} g_{jm} g_{kl} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}} \epsilon_0(i, j, k).$$

Or, par définition du déterminant de la métrique, on a

$$\epsilon_0(n, m, l) \mathbf{g} = g_{in} g_{jm} g_{kl} \epsilon_0(i, j, k).$$

On en déduit l'identité (3.28). ■

Si \mathbf{E} est un champ de tenseur 1-fois contravariant, alors les composantes covariantes du tenseur de Levi-Civita permettent d'exprimer simplement le tenseur $\nabla \times \mathbf{E}$ en composantes covariantes.

Proposition 3.27 *Soit $\mathbf{E} \in \Gamma(T^1\mathcal{O})$. Alors, les composantes covariantes du tenseur $\nabla \times \mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$ dans une carte s'écrivent*

$$(\nabla \times \mathbf{E})_l = \epsilon_{nml} \nabla^n E^m.$$

PREUVE. La multiplication par le tenseur métrique permet d'abaisser les indices, de sorte que

$$(\nabla \times \mathbf{E})_l = g_{kl} (\nabla \times \mathbf{E})^k.$$

Ainsi, d'après la définition 3.25, il vient

$$(\nabla \times \mathbf{E})_l = g_{kl} \epsilon^{ijk} \nabla_i g_{jm} E^m.$$

Or, d'après (3.17)

$$\nabla_i g_{jm} E^m = g_{jm} \nabla_i E^m.$$

D'où,

$$(\nabla \times \mathbf{E})_l = g_{jm} g_{kl} \epsilon^{ijk} \nabla_i E^m.$$

D'après la définition 3.17, on a donc

$$(\nabla \times \mathbf{E})_l = g_{in} g_{jm} g_{kl} \epsilon^{ijk} \nabla^n E^m.$$

Par suite, d'après la définition 3.26, il vient

$$(\nabla \times \mathbf{E})_l = \epsilon_{nml} \nabla^n E^m.$$

■

A partir de la définition 3.25, on utilise maintenant un résultat fondamental pour décomposer une égalité dans $\Gamma(T^1\mathcal{O})$ en deux égalités valables pour tout $h \in (0, \eta)$: une égalité dans $\Gamma(T^1\Sigma_h)$ et une autre dans $\mathcal{C}^\infty(\Sigma_h)$ si on suppose que la 1-forme \mathbf{E} est de classe \mathcal{C}^∞ , voir [25, lemme 3.6 chap.1].

Proposition 3.28 *Soit $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$ une 1-forme tridimensionnelle de classe \mathcal{C}^∞ . Alors, pour tout $h \in (0, \eta)$*

$$\begin{cases} (\nabla \times \mathbf{E})^\alpha = \epsilon^{3\beta\alpha} (\nabla_3 E_\beta - \nabla_\beta E_3) & \text{dans } \Gamma(T^1\Sigma_h) \\ (\nabla \times \mathbf{E})^3 = \epsilon^{\alpha\beta 3} \nabla_\alpha E_\beta & \text{dans } \mathcal{C}^\infty(\Sigma_h) \end{cases} \quad (3.29)$$

PREUVE. D'après (3.27),

$$(\nabla \times \mathbf{E})^3 = \epsilon^{\alpha\beta 3} \nabla_\alpha E_\beta$$

et

$$(\nabla \times \mathbf{E})^\alpha = \epsilon^{pq\alpha} \nabla_p E_q.$$

Or, $\epsilon^{pq\alpha}$ est antisymétrique en pq , donc

$$(\nabla \times \mathbf{E})^\alpha = \epsilon^{3\beta\alpha} (\nabla_3 E_\beta - \nabla_\beta E_3).$$

■

On peut aussi décomposer une égalité dans $\Gamma(T_1\mathcal{O})$ en deux égalités valables pour tout $h \in (0, \eta)$: l'une dans $\Gamma(T_1\Sigma_h)$ et l'autre dans $\mathcal{C}^\infty(\Sigma_h)$ en supposant que la 1-forme \mathbf{E} est de classe \mathcal{C}^∞ . C'est la réduction normale de la 1-forme. D'après la proposition 3.27 on a le résultat suivant.

Proposition 3.29 *Soit $\mathbf{E} \in \Gamma(T^1\mathcal{O})$ de classe \mathcal{C}^∞ . Alors, pour tout $h \in (0, \eta)$*

$$\begin{cases} (\nabla \times \mathbf{E})_\alpha = \epsilon_{3\beta\alpha} (\nabla^3 E^\beta - \nabla^\beta E^3) & \text{dans } \Gamma(T_1\Sigma_h) \\ (\nabla \times \mathbf{E})_3 = \epsilon_{\alpha\beta 3} \nabla^\alpha E^\beta & \text{dans } \mathcal{C}^\infty(\Sigma_h) \end{cases}$$

A partir de la proposition 3.28, on obtient l'expression en paramétrisation normale du champ de tenseur rotationnel en composantes contravariantes. Ceci fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 3.30 *Soit $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$ de classe \mathcal{C}^∞ . Alors, pour tout $h \in (0, \eta)$*

$$\begin{cases} (\nabla \times \mathbf{E})^\alpha = \epsilon^{3\beta\alpha}(\partial_3^h E_\beta - \partial_\beta E_3) & \text{dans } \Gamma(T_1\Sigma_h) \\ (\nabla \times \mathbf{E})^3 = \epsilon^{3\alpha\beta} D_\alpha^h E_\beta & \text{dans } \mathcal{C}^\infty(\Sigma_h) \end{cases}$$

PREUVE. D'après la proposition 3.8, il vient

$$\nabla_3 E_\alpha - \nabla_\alpha E_3 = \partial_3^h E_\alpha - \partial_\alpha E_3 \quad \text{dans } \mathcal{O}.$$

Donc, d'après la proposition 3.28, on a

$$(\nabla \times \mathbf{E})^\alpha = \epsilon^{3\beta\alpha}(\partial_3^h E_\beta - \partial_\beta E_3)$$

De plus, d'après la proposition 3.8, on a aussi

$$\nabla_\alpha E_\beta = D_\alpha^h E_\beta - b_{\alpha\beta}(h) E_3 \quad \text{dans } \mathcal{O}.$$

Or, $b_{\alpha\beta}$ est symétrique en $\alpha\beta$ alors que $\epsilon^{3\alpha\beta}$ est antisymétrique en $\alpha\beta$. Donc,

$$\epsilon^{3\alpha\beta} b_{\alpha\beta}(h) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}.$$

Par suite, d'après la proposition 3.28, il vient

$$(\nabla \times \mathbf{E})^3 = \epsilon^{3\alpha\beta} D_\alpha^h E_\beta$$

■

De la même façon, de la proposition 3.29, on déduit l'expression en paramétrisation normale du tenseur rotationnel en composantes covariantes.

Proposition 3.31 *Soit $\mathbf{E} \in \Gamma(T^1\mathcal{O})$ de classe \mathcal{C}^∞ . Alors, pour tout $h \in (0, \eta)$, on a*

$$\begin{cases} (\nabla \times \mathbf{E})_\alpha = \epsilon_{3\beta\alpha}(\partial_3^h E^\beta - g^{\beta\gamma} \partial_\gamma E^3 - 2b_\gamma^\beta E^\gamma) & \text{dans } \Gamma(T_1\Sigma_h) \\ (\nabla \times \mathbf{E})_3 = \epsilon_{3\alpha\beta} g^{\alpha\gamma} D_\gamma^h E^\beta & \text{dans } \mathcal{C}^\infty(\Sigma_h) \end{cases}$$

Remarque 3.32 *Soit $\mathbf{E} \in \Gamma(T^1\mathcal{O})$ de classe \mathcal{C}^∞ . Alors, pour tout $h \in (0, \eta)$, on a aussi*

$$(\nabla \times \mathbf{E})_\alpha = \epsilon_{3\beta\alpha} g^{\beta\gamma} (\partial_3^h E_\gamma - \partial_\gamma E_3) \quad \text{dans } \Gamma(T_1\Sigma_h).$$

PREUVE. D'après l'identité (3.12), on a

$$\nabla^3 E^\beta = \partial_3^h E^\beta + \Gamma_{l3}^\beta E^l.$$

Or $\Gamma_{\alpha 3}^\beta = -b_\alpha^\beta$ et $\Gamma_{33}^\beta = 0$. Donc,

$$\nabla^3 E^\beta = \partial_3^h E^\beta - b_\alpha^\beta E^\alpha.$$

De plus, puisque la dérivée covariante et le tenseur métrique commutent, d'après la proposition 3.8, il vient

$$\nabla^\beta E^3 = g^{\beta\gamma}(\partial_\gamma E_3 + b_\gamma^\sigma E_\sigma) \quad \text{dans } \mathcal{O}.$$

Ainsi,

$$\nabla^3 E^\beta - \nabla^\beta E^3 = (\partial_3^h E^\beta - b_\alpha^\beta E^\alpha) - g^{\beta\gamma}(\partial_\gamma E_3 + b_\gamma^\sigma E_\sigma) \quad \text{dans } \mathcal{O}$$

d'où

$$\nabla^3 E^\beta - \nabla^\beta E^3 = \partial_3^h E^\beta - g^{\beta\gamma} \partial_\gamma E^3 - 2b_\gamma^\beta E^\gamma \quad \text{dans } \mathcal{O}.$$

De plus,

$$\nabla^\alpha E^\beta = g^{\alpha\gamma}[D_\gamma^h E^\beta - b_\gamma^\beta(h)E^3] = g^{\alpha\gamma}D_\gamma^h E^\beta - b^{\alpha\beta}(h)E^3.$$

La fin de la démonstration est similaire à celle de la proposition 3.30. ■

On définit à présent le produit vectoriel entre deux champs de tenseurs.

Définition 3.33 Soient \mathbf{u} et \mathbf{v} deux champs de tenseurs dans $\Gamma(T^1\mathcal{O})$. Alors, leur produit vectoriel noté $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ est un champ de tenseur dans $\Gamma(T_1\mathcal{O})$ dont les composantes s'écrivent

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_k = \epsilon_{ijk} u^i v^j. \quad (3.30)$$

De la même façon qu'on obtient les composantes contravariantes du tenseur rotationnel à partir de ses composantes covariantes, on déduit le résultat suivant de la définition précédente.

Proposition 3.34 Soient \mathbf{u} et \mathbf{v} deux champs de tenseurs dans $\Gamma(T_1\mathcal{O})$. Alors, leur produit vectoriel est un champ de tenseur dans $\Gamma(T^1\mathcal{O})$ dont les composantes s'écrivent

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})^k = \epsilon^{ijk} u_i v_j. \quad (3.31)$$

On utilisera le lemme suivant pour déterminer les conditions de transmission du champ électrique en paramétrisation normale.

Lemme 3.35 Soit $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$. Alors, le produit vectoriel des tenseurs $\nabla \times \mathbf{E}$ et \mathbf{n} est un tenseur dans $\Gamma(T_1\mathcal{O})$, noté $(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n}$ dont les composantes s'écrivent

$$\begin{aligned} ((\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n})_\beta &= \nabla_3 E_\beta - \nabla_\beta E_3 \\ ((\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n})_3 &= 0. \end{aligned}$$

PREUVE. D'après la relation (3.30), on a

$$\begin{cases} ((\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n})_\alpha = \epsilon_{ij\alpha} (\nabla \times \mathbf{E})^i n^j \\ ((\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n})_3 = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

Ainsi, $((\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n})_\alpha = \epsilon_{\beta 3 \alpha} (\nabla \times \mathbf{E})^\beta$. Or, d'après la proposition 3.28, on a

$$(\nabla \times \mathbf{E})^\beta = \epsilon^{3\gamma\beta} (\nabla_3 E_\gamma - \nabla_\gamma E_3).$$

Donc

$$((\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n})_\alpha = \epsilon_{\beta 3 \alpha} \epsilon^{3\gamma\beta} (\nabla_3 E_\gamma - \nabla_\gamma E_3). \quad (3.33)$$

Or, par définition du tenseur de Levi-Civita, il vient

$$\epsilon_{\beta 3 \alpha} \epsilon^{3\gamma\beta} = \delta_\alpha^\gamma \quad (3.34)$$

où on rappelle que δ_α^γ désigne le symbole de Kronecker. Par suite,

$$((\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n})_\alpha = \nabla_3 E_\alpha - \nabla_\alpha E_3.$$

■

On en déduit l'expression du tenseur $(\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n}$ opérant sur Σ en paramétrisation normale.

Proposition 3.36 Soit $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$. Alors,

$$((\nabla \times \mathbf{E}) \times \mathbf{n})_\alpha = \partial_3^h E_\alpha - \partial_\alpha E_3 \quad \text{sur } \Sigma.$$

PREUVE. C'est une conséquence du lemme 3.35 et de la proposition 3.8. ■

3.5 Equations de Maxwell en paramétrisation normale

L'objet de ce paragraphe est d'écrire les équations du système de Maxwell (3.1) et (3.2) dans \mathcal{O} dans un système de coordonnées normales.

3.5.1 Le rotationnel du rotationnel

Dans toute cette sous-section, on considère \mathbf{E} comme un champ de tenseur une fois covariant. Son rotationnel est un champ de tenseur 1-fois contravariant. On définit ici le champ de tenseur rotationnel du rotationnel associé à \mathbf{E} et noté $\text{rot rot } \mathbf{E}$, puis on détermine ses composantes covariantes, voir proposition 3.38.

Définition 3.37 Soit $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$. Alors, on définit le tenseur $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$ par l'identité suivante

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{F}$$

où

$$\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{E}.$$

Proposition 3.38 Soit $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$. Alors, les composantes du tenseur $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$ dans une carte locale s'écrivent

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\alpha &= \nabla_\alpha \nabla^i E_i - \nabla^i \nabla_i E_\alpha \\ (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_3 &= \nabla_3 \nabla^\alpha E_\alpha - \nabla^\alpha \nabla_\alpha E_3 \end{aligned}$$

Remarque 3.39 On reconnaît dans chacune de ces expressions les composantes du gradient de la divergence moins la divergence du gradient de \mathbf{E} .

Afin de démontrer cette proposition, on utilisera le résultat suivant.

Lemme 3.40 Soient $i \in \{1, 2, 3\}$, et $\alpha, \sigma, \beta \in \{1, 2\}$. Alors,

$$D_\alpha^h \epsilon^{3\sigma\beta} = 0 \quad \text{et} \quad \nabla_i \epsilon^{3\sigma\beta} = 0.$$

Ce lemme repose sur la proposition suivante, qui donne une formule des symboles de Christoffel contractés.

Proposition 3.41 Pour tout $k \in \{1, 2, 3\}$, on a la relation suivante

$$\Gamma_{ik}^i = -\sqrt{\mathbf{g}} \partial_k \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}}.$$

PREUVE. D'après [20, (38.10)],

$$\Gamma_{ik}^i = \frac{1}{2\mathbf{g}} \partial_k \mathbf{g}.$$

Or, par dérivation, il vient

$$\partial_k \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}} = -\frac{1}{2\mathbf{g}} \partial_k \mathbf{g} \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}}.$$

Donc,

$$\partial_k \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}} = -\Gamma_{ik}^i \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}}}.$$

■

Démonstration du lemme 3.40

D'après la définition 3.5, pour $i = \alpha$, on a

$$\nabla_\alpha \epsilon^{3\sigma\beta} = \partial_\alpha \epsilon^{3\sigma\beta} + \Gamma_{l\alpha}^3 \epsilon^{l\sigma\beta} + \Gamma_{l\alpha}^\sigma \epsilon^{3l\beta} + \Gamma_{l\alpha}^\beta \epsilon^{3\sigma l} \quad (3.35)$$

d'où

$$\nabla_\alpha \epsilon^{3\sigma\beta} = D_\alpha^h \epsilon^{3\sigma\beta} + \Gamma_{l\alpha}^3 \epsilon^{l\sigma\beta}$$

où

$$D_\alpha^h \epsilon^{3\sigma\beta} = \partial_\alpha \epsilon^{3\sigma\beta} + \Gamma_{\nu\alpha}^\sigma \epsilon^{3\nu\beta} + \Gamma_{\nu\alpha}^\beta \epsilon^{3\sigma\nu}.$$

Or

$$\Gamma_{l\alpha}^3 \epsilon^{l\sigma\beta} = \Gamma_{\nu\alpha}^3 \epsilon^{\nu\sigma\beta} + \Gamma_{3\alpha}^3 \epsilon^{3\sigma\beta} = 0 \quad (3.36)$$

car $\Gamma_{3\alpha}^3 = 0$ et $\epsilon^{\nu\sigma\beta} = 0$. Donc

$$\nabla_\alpha \epsilon^{3\sigma\beta} = D_\alpha^h \epsilon^{3\sigma\beta}.$$

De plus, d'après la proposition 3.41, on a

$$\partial_\alpha \epsilon^{3\sigma\beta} = -\Gamma_{l\alpha}^l \epsilon^{3\sigma\beta}.$$

Ainsi, d'après les relations (3.35) et (3.36), il vient

$$\nabla_\alpha \epsilon^{3\sigma\beta} = -\Gamma_{l\alpha}^l \epsilon^{3\sigma\beta} + \Gamma_{l\alpha}^\sigma \epsilon^{3l\beta} + \Gamma_{l\alpha}^\beta \epsilon^{3\sigma l}. \quad (3.37)$$

En sommant sur $l \in \{\sigma, \beta\}$, il vient

$$-\Gamma_{l\alpha}^l \epsilon^{3\sigma\beta} + \Gamma_{l\alpha}^\sigma \epsilon^{3l\beta} + \Gamma_{l\alpha}^\beta \epsilon^{3\sigma l} = 0.$$

Donc, de (3.37), on en déduit le lemme 3.40. Pour $i = 3$, on démontre le lemme de la même façon à partir de la définition 3.5.

Démonstration de la Proposition 3.38

D'après la proposition 3.29, on a

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_3 = \epsilon_{\alpha\beta 3} \nabla^\alpha (\nabla \times \mathbf{E})^\beta.$$

Donc, par la proposition 3.30, il vient :

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_3 = \epsilon_{\alpha\beta 3} \nabla^\alpha (\epsilon^{3\sigma\beta} (\nabla_3 E_\sigma - \nabla_\sigma E_3)). \quad (3.38)$$

Or, d'après le lemme 3.40, on a

$$\nabla^\alpha \epsilon^{3\sigma\beta} = 0$$

d'où, d'après (3.14)

$$\nabla^\alpha(\epsilon^{3\sigma\beta}\nabla_3 E_\sigma) = \epsilon^{3\sigma\beta}\nabla^\alpha\nabla_3 E_\sigma.$$

De même,

$$\nabla^\alpha(\epsilon^{3\sigma\beta}\nabla_\sigma E_3) = \epsilon^{3\sigma\beta}\nabla^\alpha\nabla_\sigma E_3.$$

Par suite, d'après (3.38),

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_3 = \epsilon_{\alpha\beta 3}\epsilon^{3\sigma\beta}(\nabla^\alpha\nabla_3 E_\sigma - \nabla^\alpha\nabla_\sigma E_3).$$

Enfin, d'après la relation (3.34), il vient

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_3 = \nabla^\alpha\nabla_3 E_\alpha - \nabla^\alpha\nabla_\alpha E_3$$

et la proposition 3.11 permet de conclure. Passons à la démonstration de la composante surfacique. D'après la proposition 3.29, on a

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\alpha = \epsilon_{3\beta\alpha}(\nabla^3(\nabla \times \mathbf{E})^\beta - \nabla^\beta(\nabla \times \mathbf{E})^3).$$

Donc, par la proposition 3.30, il vient

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\alpha = \epsilon_{3\beta\alpha}\left(\nabla^3(\epsilon^{3\sigma\beta}(\nabla_3 E_\sigma - \nabla_\sigma E_3)) - \nabla^\beta(\epsilon^{\sigma\nu 3}\nabla_\sigma E_\nu)\right). \quad (3.39)$$

Or, d'après le lemme 3.40,

$$\nabla^3\epsilon^{3\sigma\beta} = 0.$$

Ainsi, d'après (3.14), il vient

$$\nabla^3(\epsilon^{3\sigma\beta}(\nabla_3 E_\sigma - \nabla_\sigma E_3)) = \epsilon^{3\sigma\beta}\nabla^3(\nabla_3 E_\sigma - \nabla_\sigma E_3).$$

De (3.39), on en déduit que

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\alpha = \epsilon_{3\beta\alpha}(\epsilon^{3\sigma\beta}\nabla^3(\nabla_3 E_\sigma - \nabla_\sigma E_3) - \epsilon^{\sigma\nu 3}\nabla^\beta\nabla_\sigma E_\nu).$$

Or,

$$\epsilon_{3\beta\alpha}\epsilon^{\sigma\nu 3} = \delta_\beta^\sigma\delta_\alpha^\nu - \delta_\beta^\nu\delta_\alpha^\sigma$$

donc, d'après la relation (3.34), on en déduit l'identité

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\alpha = -\nabla^3(\nabla_3 E_\alpha - \nabla_\alpha E_3) - (\nabla^\beta\nabla_\beta E_\alpha - \nabla^\beta\nabla_\alpha E_\beta). \quad (3.40)$$

Par suite, d'après la proposition 3.11, il vient

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\alpha = \nabla_\alpha\nabla^i E_i - \nabla^i\nabla_i E_\alpha.$$

Les tenseurs γ et ρ introduits au paragraphe 3.3.4 permettent alors d'exprimer d'une autre façon le champ de tenseur $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}$.

Proposition 3.42 Soit $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$. Alors, les composantes du tenseur $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$ dans une carte locale s'écrivent

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\alpha &= -2\nabla_3\gamma_{\alpha 3}(h)(\mathbf{E}) + 2\nabla_\alpha\nabla_3E_3 + 2(\nabla_\alpha\gamma_\beta^\beta(h)(\mathbf{E}) - \nabla_\beta\gamma_\alpha^\beta(h)(\mathbf{E})) \\ (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_3 &= \nabla_3\gamma_\alpha^\alpha(h)(\mathbf{E}) + b_\alpha^\alpha(h)\nabla_3E_3 - \rho_\alpha^\alpha(h)(\mathbf{E}) \end{aligned}$$

PREUVE. Commençons par démontrer la première égalité. Par définition du tenseur γ , voir (3.21), on a

$$2\nabla_3\gamma_{\alpha 3}(h)(\mathbf{E}) = \nabla_3\nabla_\alpha E_3 + \nabla_3\nabla_3E_\alpha$$

d'où,

$$-2\nabla_3\gamma_{\alpha 3}(h)(\mathbf{E}) + 2\nabla_\alpha\nabla_3E_3 = -\nabla^3(\nabla_3E_\alpha - \nabla_\alpha E_3). \quad (3.41)$$

De plus,

$$2\nabla_\alpha\gamma_\beta^\beta(h)(\mathbf{E}) = \nabla_\alpha\nabla^\beta E_\beta + \nabla_\alpha\nabla_\beta E^\beta$$

et,

$$2\nabla_\beta\gamma_\alpha^\beta(h)(\mathbf{E}) = \nabla_\beta\nabla^\beta E_\alpha + \nabla_\beta\nabla_\alpha E^\beta$$

donc

$$2(\nabla_\alpha\gamma_\beta^\beta(h)(\mathbf{E}) - \nabla_\beta\gamma_\alpha^\beta(h)(\mathbf{E})) = \nabla_\alpha\nabla^\beta E_\beta - \nabla_\beta\nabla^\beta E_\alpha. \quad (3.42)$$

Ainsi, d'après (3.41) et (3.42),

$$\begin{aligned} & -2\nabla_3\gamma_{\alpha 3}(h)(\mathbf{E}) + 2\nabla_\alpha\nabla_3E_3 + 2(\nabla_\alpha\gamma_\beta^\beta(h)(\mathbf{E}) - \nabla_\beta\gamma_\alpha^\beta(h)(\mathbf{E})) \\ &= -\nabla^3(\nabla_3E_\alpha - \nabla_\alpha E_3) + \nabla_\alpha\nabla^\beta E_\beta - \nabla_\beta\nabla^\beta E_\alpha \\ &= \nabla_\alpha\nabla^i E_i - \nabla^i\nabla_i E_\alpha \end{aligned}$$

La proposition 3.38 permet de conclure. Passons à la démonstration de la seconde égalité. D'après (3.23),

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta E_3 = \rho_{\alpha\beta}(h)(\mathbf{E}) - b_{\alpha\beta}(h)\nabla_3E_3.$$

Or, d'après (3.19),

$$\nabla_\alpha\nabla_\beta E_3 = \nabla_\beta\nabla_\alpha E_3$$

Ainsi,

$$\nabla_\beta\nabla_\alpha E_3 = \rho_{\alpha\beta}(h)(\mathbf{E}) - b_{\alpha\beta}(h)\nabla_3E_3.$$

D'où

$$g^{\alpha\beta}(h)\nabla_\beta\nabla_\alpha E_3 = g^{\alpha\beta}(h)\rho_{\alpha\beta}(h)(\mathbf{E}) - g^{\alpha\beta}(h)b_{\alpha\beta}(h)\nabla_3E_3.$$

Donc,

$$\nabla^\alpha\nabla_\alpha E_3 = \rho_\alpha^\alpha(h)(\mathbf{E}) - b_\alpha^\alpha(h)\nabla_3E_3. \quad (3.43)$$

Enfin, on vérifie facilement que,

$$\nabla^\alpha\nabla_3E_\alpha = \nabla_3\gamma_\alpha^\alpha(h)(\mathbf{E}).$$

Ainsi, la proposition précédente permet de conclure que

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_3 = \nabla_3 \gamma_\alpha^\alpha(h)(\mathbf{E}) + b_\alpha^\alpha(h) \nabla_3 E_3 - \rho_\alpha^\alpha(h)(\mathbf{E}).$$

■

On introduit à présent le tenseur \mathbf{A} dont les composantes contravariantes dans le système de coordonnées normales s'écrivent

$$A^{ijkl} = 2g^{ij}g^{kl} - (g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}). \quad (3.44)$$

La proposition suivante fait alors le lien entre l'opérateur d'élasticité étudié dans [25] et l'opérateur de Maxwell. Ce dernier s'obtient à partir de l'élasticité en choisissant des "coefficients de Lamé" $\lambda = 2$ et $\mu = -1$. Ceux-ci n'ont plus de sens physique dans l'élasticité traditionnelle lorsqu'ils sont négatifs.

Proposition 3.43 Soit $\mathbf{E} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$. Alors, pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, on a

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_j = A_j^{ikl} \nabla_i \gamma_{kl}(h)(\mathbf{E}). \quad (3.45)$$

PREUVE. Fixons $j = \alpha \in \{1, 2\}$. D'après (3.44), et compte tenu des symétries de \mathbf{A} , il vient

$$A_\alpha^{ikl} \nabla_i \gamma_{kl}(h)(\mathbf{E}) = 2A_\alpha^{3\beta 3} \nabla_3 \gamma_{\beta 3}(h)(\mathbf{E}) + A_\alpha^{\beta 3 3} \nabla_\beta \nabla_3 E_3 + A_\alpha^{\sigma \beta \delta} \nabla_\sigma \gamma_{\beta \delta}(h)(\mathbf{E}).$$

Or, d'après (3.44), on a

$$\begin{cases} 2A_\alpha^{3\beta 3} = -2\delta_\alpha^\beta \\ A_\alpha^{\beta 3 3} = 2\delta_\alpha^\beta \\ A_\alpha^{\sigma \beta \delta} = 2\delta_\alpha^\sigma g^{\beta \delta} - \delta_\alpha^\beta g^{\sigma \delta} - \delta_\alpha^\delta g^{\sigma \beta} \end{cases}$$

Donc,

$$A_\alpha^{ikl} \nabla_i \gamma_{kl}(h)(\mathbf{E}) = -2\nabla_3 \gamma_{\alpha 3}(h)(\mathbf{E}) + 2\nabla_\alpha \nabla_3 E_3 + 2(\nabla_\alpha \gamma_\beta^\beta(h)(\mathbf{E}) - \nabla_\beta \gamma_\alpha^\beta(h)(\mathbf{E})).$$

Ainsi, d'après la proposition 3.42,

$$A_\alpha^{ikl} \nabla_i \gamma_{kl}(h)(\mathbf{E}) = (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\alpha.$$

Fixons maintenant $j = 3$. Alors, compte tenu des symétries de \mathbf{A} , le second membre de (3.45) se réduit de la façon suivante

$$A_3^{ikl} \nabla_i \gamma_{kl}(h)(\mathbf{E}) = A_3^{333} \nabla_3 \nabla_3 E_3 + A_3^{3\alpha\beta} \nabla_3 \gamma_{\alpha\beta}(h)(\mathbf{E}) + A_3^{\alpha\beta 3} \nabla_\alpha \nabla_\beta E_3 + A_3^{\alpha\beta 3} \nabla_\alpha \nabla_3 E_\beta.$$

Or, d'après (3.44), on a

$$\begin{cases} A^{3333} = 0 \\ A^{33\alpha\beta} = 2g^{\alpha\beta} \\ A^{3\alpha\beta 3} = -g^{\alpha\beta} \end{cases}$$

D'où,

$$A_3^{ikl} \nabla_i \gamma_{kl}(h)(\mathbf{E}) = 2g^{\alpha\beta} \nabla_3 \gamma_{\alpha\beta}(h)(\mathbf{E}) - g^{\alpha\beta} (\nabla_\alpha \nabla_\beta E_3 + \nabla_\alpha \nabla_3 E_\beta).$$

Or,

$$2g^{\alpha\beta} \nabla_3 \gamma_{\alpha\beta}(h)(\mathbf{E}) = g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta E_3$$

donc

$$A_3^{ikl} \nabla_i \gamma_{kl}(h)(\mathbf{E}) = g^{\alpha\beta} \nabla_3 \gamma_{\alpha\beta}(h)(\mathbf{E}) - g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta E_3. \quad (3.46)$$

Enfin, d'une part, puisque la dérivée covariante commute avec le tenseur métrique,

$$g^{\alpha\beta} \nabla_3 \gamma_{\alpha\beta}(h)(\mathbf{E}) = \nabla_3 \gamma_\alpha^\alpha(h)(\mathbf{E}).$$

D'autre part, d'après (3.43), on a

$$g^{\alpha\beta} \nabla_\alpha \nabla_\beta E_3 = \rho_\alpha^\alpha(h)(\mathbf{E}) - b_\alpha^\alpha(h) \nabla_3 E_3.$$

Donc, d'après (3.46),

$$A_3^{ikl} \nabla_i \gamma_{kl}(h)(\mathbf{E}) = \nabla_3 \gamma_\alpha^\alpha(h)(\mathbf{E}) - \rho_\alpha^\alpha(h)(\mathbf{E}) + b_\alpha^\alpha(h) \nabla_3 E_3.$$

Par suite, la proposition 3.42 permet de conclure à l'équation (3.45) pour $j = 3$. ■

Remarque 3.44 D'après la proposition 3.31, pour un champ de tenseur \mathbf{E} une fois co-variant, il vient

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\alpha &= \epsilon_{3\beta\alpha} \left(\partial_3^h (\nabla \times \mathbf{E})^\beta - g^{\beta\gamma} \partial_\gamma (\nabla \times \mathbf{E})^3 - 2b_\gamma^\beta (\nabla \times \mathbf{E})^\gamma \right) \\ (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_3 &= \epsilon_{\alpha\beta 3} g^{\alpha\sigma} D_\sigma^h (\nabla \times \mathbf{E})^\beta \end{aligned}$$

En particulier, d'après la proposition 3.30, on a

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\alpha &= \epsilon_{3\beta\alpha} \left(\partial_3^h (\epsilon^{3\sigma\beta} (\partial_3^h E_\sigma - \partial_\sigma E_3)) - g^{\beta\gamma} \partial_\gamma (\epsilon^{3\sigma\nu} D_\sigma^h E_\nu) \right. \\ &\quad \left. - 2b_\gamma^\beta \epsilon^{3\sigma\gamma} (\partial_3^h E_\sigma - \partial_\sigma E_3) \right) \\ (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_3 &= \epsilon_{\alpha\beta 3} g^{\alpha\sigma} D_\sigma^h (\epsilon^{3\nu\beta} (\partial_3^h E_\nu - \partial_\nu E_3)) \end{aligned}$$

Le développement de ces relations amène à d'autres formulations des équations de Maxwell en paramétrisation normale, comparer avec les équations des systèmes (3.50) et (3.51). En particulier, on a

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_3 = g^{\alpha\beta}(h) D_\beta^h \partial_3^h E_\alpha - g^{\alpha\beta}(h) D_\beta^h \partial_\beta E_3$$

ce qui fait l'économie du développement du tenseur $\rho_\alpha^\alpha(h)$, voir le chapitre 4.

3.5.2 Equations tridimensionnelles

L'objet de cette dernière partie consiste à écrire les équations de Maxwell (3.1) et (3.2) en paramétrisation normale dans un voisinage tubulaire de Σ . Pour cela, on commence par écrire les équations en terme de dérivées covariantes ∇ . On exprime ensuite ces équations en termes de dérivées covariantes D^h , de dérivées ∂_3^h et d'opérateurs définis sur Σ_h dépendant des tenseurs métrique $a_{\alpha\beta}(h)$ et de courbure $b_{\alpha\beta}(h)$.

Proposition 3.45 Soit $\mathbf{E}^{\text{cd}} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$ une solution de l'équation (3.1). Alors, pour tout $j \in \{1, 2, 3\}$, on a

$$A_j^{klm} \nabla_k \gamma_{lm}(h)(\mathbf{E}^{\text{cd}}) - \kappa^2 \left(1 + \frac{i}{\delta^2}\right) E_j^{\text{cd}} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O}. \quad (3.47)$$

De plus, les conditions de transmission (3.2) du champ électrique à travers Σ s'écrivent

$$\begin{cases} E_\alpha^{\text{cd}} dy^\alpha &= \mathbf{E}^{\text{is}} - (\mathbf{E}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \\ (\nabla_3 E_\alpha^{\text{cd}} - \nabla_\alpha E_3^{\text{cd}}) dy^\alpha &= \text{rot } \mathbf{E}^{\text{is}} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.48)$$

Enfin, on a les relations suivantes

$$\begin{cases} \nabla^i E_i^{\text{cd}} &= 0 & \text{dans } \mathcal{O} \\ (1 + \frac{i}{\delta^2}) E_3^{\text{cd}} &= \mathbf{E}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.49)$$

Remarque 3.46 L'équation (3.47) est une égalité de champs de tenseurs dans $\Gamma(T_1\mathcal{O})$. Les équations (3.49) sont des égalités entre des fonctions. On remarque que toutes ces équations font intervenir les composantes covariantes de \mathbf{E}^{cd} .

PREUVE. La relation (3.47) dans \mathcal{O} se déduit de la proposition 3.43. L'identité (3.49)₁ dans \mathcal{O} signifie que la divergence de \mathbf{E}^{cd} est nulle. C'est une conséquence de la relation (3.3) et de la définition 3.18. La condition de transmission du système (3.49) est une conséquence de la relation (3.4) et du fait que

$$\mathbf{E}^{\text{cd}} \cdot \mathbf{n} = E_3^{\text{cd}} \quad \text{sur } \Sigma.$$

La première condition de transmission du système (3.48) est une conséquence de la relation suivante

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{cd}}) \times \mathbf{n} = E_{\alpha}^{\text{cd}} dy^{\alpha} \quad \text{sur } \Sigma,$$

et signifie que $[\mathbf{E} \times \mathbf{n}]_{\Sigma} = 0$ car $\mathbf{E}^{\text{is}} - (\mathbf{E}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^{\text{is}}) \times \mathbf{n}$. Enfin, la seconde condition de transmission est une conséquence du lemme 3.35. ■

Le théorème suivant fournit l'expression en paramétrisation normale de l'opérateur défini par les systèmes d'équations (3.47) et (3.48), voir [25, Théorème 4.4 chap.1] pour l'opérateur de l'élasticité. On utilise encore la réduction normale de la 1-forme qui permet de décomposer une égalité dans $\Gamma(T_1\mathcal{O})$ en deux égalités pour tout $h \in (0, \eta)$: une égalité dans $\Gamma(T_1\Sigma_h)$ et une autre dans $\mathcal{C}^{\infty}(\Sigma_h)$ en supposant que la 1-forme \mathbf{E}^{cd} est de classe \mathcal{C}^{∞} , voir [25, lemme 3.6 chap.1].

Théorème 3.47 *Soit $\mathbf{E}^{\text{cd}} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$. La réduction normale des équations (3.47) et (3.48) écrites en composantes covariantes, donne les équations suivantes : en composantes transverses (pour $j = 3$), on a la relation*

$$\partial_3^h \gamma_{\alpha}^{\alpha}(h)(\mathbf{E}^{\text{cd}}) + b_{\alpha}^{\alpha}(h) \partial_3^h E_3^{\text{cd}} - \rho_{\alpha}^{\alpha}(h)(\mathbf{E}^{\text{cd}}) - \kappa^2(1 + \frac{i}{\delta^2}) E_3^{\text{cd}} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \quad (3.50)$$

En composantes surfaciques (pour $j = \alpha$), il vient

$$\begin{aligned} & -2\partial_3^h \gamma_{\alpha 3}(h)(\mathbf{E}^{\text{cd}}) + 2\partial_3^h (D_{\alpha}^h E_3^{\text{cd}}) + 2b_{\beta}^{\beta}(h) \gamma_{\alpha 3}(h)(\mathbf{E}^{\text{cd}}) \\ & + 2D_{\alpha}^h \gamma_{\nu}^{\nu}(h)(\mathbf{E}^{\text{cd}}) - 2D_{\beta}^h \gamma_{\alpha}^{\beta}(h)(\mathbf{E}^{\text{cd}}) - \kappa^2(1 + \frac{i}{\delta^2}) E_{\alpha}^{\text{cd}} = 0 \quad \text{dans } \mathcal{O} \\ & E_{\alpha}^{\text{cd}} dy^{\alpha} = \mathbf{E}^{\text{is}} - (\mathbf{E}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \\ & (\partial_3^h E_{\alpha}^{\text{cd}} - \partial_{\alpha} E_3^{\text{cd}}) dy^{\alpha} = \text{rot } \mathbf{E}^{\text{is}} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \end{aligned} \quad (3.51)$$

De plus, la réduction normale des équations (3.49) s'écrit

$$\begin{cases} \partial_3^h E_3^{\text{cd}} + \gamma_{\alpha}^{\alpha}(h)(\mathbf{E}^{\text{cd}}) = 0 & \text{dans } \mathcal{O} \\ (1 + \frac{i}{\delta^2}) E_3^{\text{cd}} = \mathbf{E}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (3.52)$$

Remarque 3.48 *Les équations précédentes écrites en coordonnées normales sont intrinsèques car tous les objets indicés sont des champs de tenseurs. L'équation (3.50) et la première équation de (3.52) sont aussi des égalités dans $\mathcal{C}^{\infty}(\Sigma_h)$ pour tout $h \in (0, \eta)$. De plus, la première équation dans (3.51) est une égalité dans $\Gamma(T_1\Sigma_h)$ pour tout $h \in (0, \eta)$ et les deux autres équations sont des égalités dans $\Gamma(T_1\Sigma)$.*

PREUVE. L'équation (3.50) est une conséquence immédiate de la proposition 3.42. La première relation dans (3.52) est une conséquence de la proposition 3.20. Enfin, d'après la proposition 3.36, on en déduit la troisième équation dans (3.51). On utilise les relations (3.15) pour exprimer (3.47) en termes de dérivées covariantes D^h , de dérivées ∂_3^h

et d'opérateurs sur Σ_h . On démontre la première équation du système (3.51) : d'après (3.12),

$$\nabla_3 \gamma_{\alpha 3} = \partial_3^h \gamma_{\alpha 3} + b_\alpha^\nu \gamma_{\nu 3} \quad (3.53)$$

car $\Gamma_{\alpha 3}^\beta = -b_\alpha^\beta$, $\Gamma_{\alpha 3}^3 = 0$ et $\Gamma_{33}^l = 0$. Dans la suite de cette démonstration, on note plus simplement \mathbf{E} à la place de \mathbf{E}^{cd} . Puis,

$$\nabla_\alpha \nabla_3 E_3 = \partial_3^h \partial_\alpha E_3 + 2b_\alpha^\nu \gamma_{\nu 3}(\mathbf{E}). \quad (3.54)$$

De plus, pour des tenseurs deux fois covariants, on a la relation suivante entre opérateurs dépendant de h

$$\nabla_\alpha \gamma_\beta^\sigma = \partial_\alpha \gamma_\beta^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^\nu \gamma_\nu^\sigma - \Gamma_{\alpha\beta}^3 \gamma_3^\sigma + \Gamma_{\alpha\nu}^\sigma \gamma_\beta^\nu + \Gamma_{\alpha 3}^\sigma \gamma_\beta^3.$$

Or, $\Gamma_{\alpha\beta}^3 = b_{\alpha\beta}$ et $\Gamma_{\alpha 3}^\sigma = -b_\alpha^\sigma$. On en déduit l'identité suivante liant les dérivées covariantes ∇ et D

$$\nabla_\alpha \gamma_\beta^\sigma = D_\alpha \gamma_\beta^\sigma - b_{\alpha\beta} \gamma_3^\sigma - b_\alpha^\sigma \gamma_\beta^3.$$

En particulier, on a les relations suivantes

$$\nabla_\alpha \gamma_\beta^\beta = D_\alpha \gamma_\beta^\beta - 2b_\alpha^\beta \gamma_{\beta 3} \quad (3.55)$$

et

$$\nabla_\beta \gamma_\alpha^\beta = D_\beta \gamma_\alpha^\beta - b_\alpha^\beta \gamma_{\beta 3} - b_\beta^\beta \gamma_{\alpha 3}. \quad (3.56)$$

Or d'après la proposition 3.42,

$$(\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\alpha = -2\nabla_3 \gamma_{\alpha 3}(h)(\mathbf{E}) + 2\nabla_\alpha \nabla_3 E_3 + 2(\nabla_\alpha \gamma_\beta^\beta(h)(\mathbf{E}) - \nabla_\beta \gamma_\alpha^\beta(h)(\mathbf{E})).$$

Donc, d'après (3.53), (3.54), (3.55) et (3.56), il vient

$$\begin{aligned} (\nabla \times \nabla \times \mathbf{E})_\alpha = & -2\left(\partial_3^h \gamma_{\alpha 3}(h)(\mathbf{E}) + b_\alpha^\nu \gamma_{\nu 3}(h)(\mathbf{E})\right) + 2\left(\partial_3^h \partial_\alpha E_3 + 2b_\alpha^\nu \gamma_{\nu 3}(\mathbf{E})\right) \\ & + 2\left[(D_\alpha \gamma_\beta^\beta - 2b_\alpha^\beta \gamma_{\beta 3}) - (D_\beta \gamma_\alpha^\beta - b_\alpha^\beta \gamma_{\alpha 3} - b_\beta^\beta \gamma_{\alpha 3})\right]. \end{aligned}$$

■

Dans le chapitre suivant, on va développer les équations précédentes en fonction de h .

Chapitre 4

Ecriture des équations en explicitant le petit paramètre δ

4.1 Introduction

L'objet de ce quatrième chapitre consiste à développer par rapport à h les équations (3.50), (3.51) et (3.52) posées sur les surfaces Σ_h , voir le chapitre 3, puis à expliciter le rôle du petit paramètre δ dans les équations. On effectue pour cela un changement d'échelle dans ces équations et on montre que l'opérateur sous-jacent est développable en série entière en δ , voir [25, 26] pour une étude similaire de l'élasticité linéaire tridimensionnel.

Le plan de ce chapitre est le suivant. On introduit le champ de tenseur shifter au paragraphe 4.2, qui permet de ramener l'étude de tenseurs définis sur Σ_h à des tenseurs définis sur Σ_0 et dépendant de h . Dans la section 4.3, on effectue un changement d'échelle dans la direction normale et on donne un développement en série entière en δ des équations, voir le théorème 4.10 pour un résultat précis. On explicite ensuite au paragraphe 4.4, les développements en séries entières des champs de tenseurs intervenant dans les équations. Enfin, dans une dernière partie, on explicite les coefficients des développements en séries des opérateurs transverses, surfaciques ainsi que de la divergence, voir section 4.5.

4.2 Le shifter

On rappelle que $a_{\alpha\beta}(h)$ désigne le tenseur métrique sur Σ_h et $b_{\alpha\beta}(h)$ son tenseur de courbure, voir la sous-section 3.3.1. Dans la suite, on note $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta}(0)$, $b_{\alpha\beta} = b_{\alpha\beta}(0)$ et $b_{\beta}^{\alpha} = b_{\beta}^{\alpha}(0)$.

Définition 4.1 On appelle *shifter* le champ de tenseurs μ défini sur Σ_0 et dépendant de $h \in (0, \eta)$, dont les composantes s'écrivent dans une carte

$$\mu_\beta^\alpha(h) = \delta_\beta^\alpha - hb_\beta^\alpha. \quad (4.1)$$

Le shifter permet d'exprimer des champs de tenseurs définis sur la surface Σ_h à partir de leurs expressions sur la surface moyenne Σ_0 . On peut démontrer que le tenseur métrique $a_{\alpha\beta}(h)$ et le tenseur de courbure $b_{\alpha\beta}(h)$ sont polynomiaux en h , voir [25] pour les formules suivantes

$$a_{\alpha\beta}(h) = a_{\alpha\beta} - 2hb_{\alpha\beta} + h^2c_{\alpha\beta} \quad (4.2)$$

où le tenseur symétrique $c_{\alpha\beta} = b_\alpha^\gamma b_{\gamma\beta}$ est appelé la troisième forme fondamentale sur Σ , et

$$b_{\alpha\beta}(h) = b_{\alpha\beta} - hc_{\alpha\beta}. \quad (4.3)$$

Ainsi, à l'aide du shifter, on en déduit les formules suivantes.

Exemple 1 Pour tout $h \in (0, \eta)$, on a

$$a_{\alpha\beta}(h) = \mu_\alpha^\gamma(h) \mu_\beta^\lambda(h) a_{\gamma\lambda}. \quad (4.4)$$

Exemple 2 Pour tout $h \in (0, \eta)$, on a

$$b_{\alpha\beta}(h) = \mu_\alpha^\gamma(h) b_{\gamma\beta}. \quad (4.5)$$

Ces exemples seront utiles pour développer les équations.

Définition 4.2 Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $h \in (0, \eta)$, on définit

$$(b^k)_\beta^\alpha(h) = b_{\nu_1}^\alpha(h) b_{\nu_2}^{\nu_1}(h) \cdots b_\beta^{\nu_{k-1}}(h), \quad (4.6)$$

avec la convention $(b^0)_\beta^\alpha(h) = \delta_\beta^\alpha$. On note $(b^k)_\beta^\alpha = (b^k)_\beta^\alpha(0)$.

On fixe à présent un réel $\eta > 0$ assez petit tel que le shifter μ_β^α soit inversible dans l'intervalle $(0, \eta)$.

Proposition 4.3 L'inverse du shifter μ est le champ de tenseur dont les composantes $(\mu^{-1})_\beta^\alpha(h)$ sont égales à la série entière convergente

$$(\mu^{-1})_\beta^\alpha(h) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n (b^n)_\beta^\alpha \quad (4.7)$$

Remarque 4.4 La surface Σ_0 est compacte, donc le champ de tenseurs b_β^α est borné. Ainsi, la série de Taylor du champ de tenseur $(\mu^{-1})_\beta^\alpha(h)$ converge normalement.

4.3 Développement en séries entières en δ

L'objet de ce paragraphe consiste à développer en série entière en h les champs de tenseurs intervenant dans les équations. On effectue un changement d'échelle, dans l'optique de calculer un développement asymptotique du champ électromagnétique en puissance de δ . On donne un théorème d'existence de développement en série entière en puissance de δ pour les équations.

4.3.1 Formes fondamentales

Grâce à l'inverse du shifter, on calcule un développement en série entière de l'inverse du tenseur métrique $a^{\alpha\beta}$. D'après, la formule (4.4), pour tout $h \in (0, \eta)$, il vient

$$a^{\alpha\beta}(h) = (\mu^{-1})^\alpha_\nu (\mu^{-1})^\beta_\gamma a^{\nu\gamma}$$

où $a^{\nu\gamma} = a^{\nu\gamma}(0)$. On en déduit le développement en série entière de l'inverse du tenseur métrique

$$a^{\alpha\beta}(h) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) h^n (b^n)^{\alpha\beta}. \quad (4.8)$$

A partir de la formule (4.5), on calcule aussi le développement en série entière du tenseur $b^\alpha_\beta(h)$, voir [25].

$$b^\alpha_\beta(h) = \sum_{n=0}^{\infty} h^n (b^{n+1})^\alpha_\beta. \quad (4.9)$$

4.3.2 Développement de la dérivée covariante

On rappelle que D désigne la dérivée covariante sur Σ_0 . Le théorème suivant exprime un développement de la dérivée covariante D^h sur Σ_h à partir de la dérivée covariante D et du shifter, voir [25] pour la démonstration du résultat suivant.

Théorème 4.5 *Soit $E_\beta(h) \in \mathcal{C}^\infty((0, \eta), \Gamma(T_1\Sigma_0))$. Alors, on a la relation suivante entre les dérivées covariantes D^h et D*

$$D^h_\alpha E_\beta(h) = D_\alpha E_\beta(h) - (\mu^{-1})^\sigma_\delta(h) E_\sigma(h) D_\alpha \mu^\delta_\beta(h). \quad (4.10)$$

4.3.3 Changement d'échelle

Dans l'optique d'effectuer un développement asymptotique du champ électromagnétique en puissance de δ , on effectue un changement d'échelle, ou *scaling*, dans la direction normale. Précisément, on pose

$$Y_3 = \frac{h}{\delta} \quad (4.11)$$

voir [25, 8]. On définit les intervalles I_δ et I par

$$I_\delta = (0, \frac{\eta}{\delta}) \quad \text{et} \quad I = (0, \infty). \quad (4.12)$$

Alors, pour tout $h \in (0, \eta)$, on a $Y_3 \in I_\delta \subset I$. On appelle encore le triplet (y_α, Y_3) un système de coordonnées normales. Enfin, on note ∂_3 la dérivée partielle par rapport à Y_3 , de sorte qu'on a

$$\partial_3 = \partial_{Y_3}.$$

D'après le changement d'échelle (4.11), il vient

$$\partial_3^h = \frac{1}{\delta} \partial_3. \quad (4.13)$$

On définit enfin les variétés produits Ω_δ et Ω_0 par

$$\Omega_\delta = \Sigma \times I_\delta \quad \text{et} \quad \Omega_0 = \Sigma \times I. \quad (4.14)$$

Définition 4.6 Soit $\mathbf{T}(h) \in \mathcal{C}^\infty((0, \eta), \Gamma(T_p^q \Sigma_0))$. On définit le champ de tenseur $\mathbf{T}[\delta] \in \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_p^q \Sigma_0))$ associé à $\mathbf{T}(h)$ après le changement d'échelle (4.11) par

$$\mathbf{T}[\delta] = \mathbf{T}(\delta Y_3).$$

D'après les identités respectives (4.1), (4.7), (4.8) et (4.9), on en déduit les développements en séries en δ du shifter $\mu[\delta]$ et de son inverse $\mu^{-1}[\delta]$, ainsi que des tenseurs $a^{\alpha\beta}[\delta]$ et $b_\beta^\alpha[\delta]$. Ceci fait l'objet des formules suivantes.

Exemple 3 (i) $\mu_\beta^\alpha[\delta] = \delta_\beta^\alpha - \delta Y_3 b_\beta^\alpha$

$$(ii) (\mu^{-1})_\beta^\alpha[\delta] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n Y_3^n (b^n)_\beta^\alpha$$

$$(iii) a^{\alpha\beta}[\delta] = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \delta^n Y_3^n (b^n)^{\alpha\beta}$$

$$(iv) b_\beta^\alpha[\delta] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n Y_3^n (b^{n+1})_\beta^\alpha.$$

4.3.4 Opérateurs 2D

Dans la suite de ce chapitre, on va développer les équations par rapport à h . Les coefficients de ces développements sont des opérateurs intrinsèques définis sur la variété Σ . Ces opérateurs sont des opérateurs 2D, dont la notion est définie rigoureusement dans

[25]. Les opérateurs $\rho_{\alpha\beta}(0)$, $\gamma_{\alpha\beta}(0)$, $\gamma_{\alpha}^{\beta}(0)$, $\gamma_{\alpha 3}(0)$ sont des exemples d'opérateurs 2D. Ils agissent naturellement sur l'espace

$$\mathcal{C}^{\infty}(I_{\delta}, \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^{\infty}(\Sigma_0)).$$

Notation 4.7 Pour ne pas alourdir les notations, on note dans la suite $\rho_{\alpha\beta} = \rho_{\alpha\beta}(0)$, $\gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}(0)$, $\gamma_{\alpha}^{\beta} = \gamma_{\alpha}^{\beta}(0)$ et $\gamma_{\alpha 3} = \gamma_{\alpha 3}(0)$.

On utilisera la propriété remarquable suivante. La dérivée partielle ∂_3 commute avec ces opérateurs 2D.

Exemple 4 $\partial_3 \circ \gamma_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta} \circ \partial_3$.

4.3.5 Développement en séries entières de l'opérateur 3D

Le théorème 3.47 donne une expression de l'opérateur de Maxwell associé au champ électrique en coordonnées normales. A partir des équations (3.50) et (3.51), on peut définir des opérateurs

$$R_{\alpha} : \mathcal{C}^{\infty}((0, \eta), \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^{\infty}(\Sigma_0)) \rightarrow \mathcal{C}^{\infty}((0, \eta), \Gamma(T_1 \Sigma_0)) \quad (4.15)$$

et

$$R_3 : \mathcal{C}^{\infty}((0, \eta), \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^{\infty}(\Sigma_0)) \rightarrow \mathcal{C}^{\infty}((0, \eta), \mathcal{C}^{\infty}(\Sigma_0)) \quad (4.16)$$

par les équations

$$\begin{cases} R_{\alpha}(\mathbf{E}) = -2\partial_3^h \gamma_{\alpha 3}(h)(\mathbf{E}) + 2\partial_3^h (D_{\alpha}^h E_3) + 2b_{\beta}^{\beta}(h)\gamma_{\alpha 3}(h)(\mathbf{E}) \\ \quad + 2D_{\alpha}^h \gamma_{\nu}^{\nu}(h)(\mathbf{E}) - 2D_{\beta}^h \gamma_{\alpha}^{\beta}(h)(\mathbf{E}) \\ R_3(\mathbf{E}) = \partial_3^h \gamma_{\alpha}^{\alpha}(h)(\mathbf{E}) + b_{\alpha}^{\alpha}(h)\partial_3^h E_3 - \rho_{\alpha}^{\alpha}(h)(\mathbf{E}). \end{cases} \quad (4.17)$$

On définit l'opérateur 3D correspondant, noté \mathbf{R} par

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{R} : \mathcal{C}^{\infty}((0, \eta), \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^{\infty}(\Sigma_0)) & \rightarrow & \mathcal{C}^{\infty}((0, \eta), \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^{\infty}(\Sigma_0)) \\ \mathbf{E} & \mapsto & (R_{\alpha}(\mathbf{E}), R_3(\mathbf{E})) \end{array} \quad (4.18)$$

voir [25] pour l'opérateur de l'élasticité linéaire tridimensionnel. On définit alors l'opérateur associé aux équations de Maxwell par

$$\mathbf{L} = \mathbf{R} - \kappa^2 \left(1 + \frac{i}{\delta^2}\right) \mathbf{I}. \quad (4.19)$$

On définit aussi l'opérateur associé à la divergence

$$\text{div} : \mathcal{C}^{\infty}((0, \eta), \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^{\infty}(\Sigma_0)) \rightarrow \mathcal{C}^{\infty}((0, \eta), \mathcal{C}^{\infty}(\Sigma_0))$$

par l'équation, voir la proposition 3.20,

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}) = \partial_3^h E_3 + \gamma_\alpha^\alpha(h)(\mathbf{E}). \quad (4.20)$$

De même, à partir des conditions de transmissions parmi les équations (3.51), on définit un opérateur

$$\mathbf{B} : \mathcal{C}^\infty((0, \eta), \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \rightarrow \Gamma(T_1 \Sigma_0) \quad (4.21)$$

par ses composantes surfaciques

$$B_\alpha(\mathbf{E}) = \partial_3^h E_\alpha^{\text{cd}} - \partial_\alpha E_3^{\text{cd}}. \quad (4.22)$$

A partir du changement d'échelle (4.11), on effectue le changement d'inconnue

$$\mathbf{E}(\cdot, h) = \mathbf{W}(\cdot, Y_3)$$

et on définit des nouveaux opérateurs à partir des opérateurs \mathbf{R} , \mathbf{L} , div et \mathbf{B} . Ceci fait l'objet de la définition suivante.

Définition 4.8 *Soient*

$$\mathbf{R}[\delta] : \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \quad (4.23)$$

$$\operatorname{div}[\delta] : \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \quad (4.24)$$

et

$$\mathbf{B}[\delta] : \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \rightarrow \Gamma(T_1 \Sigma_0) \quad (4.25)$$

les opérateurs obtenus à partir des opérateurs \mathbf{R} , div et \mathbf{B} en effectuant le changement d'échelle (4.11), de sorte que

$$\begin{aligned} (\mathbf{RE})(\cdot, h) &= (\mathbf{R}[\delta]\mathbf{W})(\cdot, Y_3), \quad (\operatorname{div} \mathbf{E})(\cdot, h) = (\operatorname{div}[\delta]\mathbf{W})(\cdot, Y_3) \\ &\text{et} \quad (\mathbf{BE})(\cdot, 0) = (\mathbf{B}[\delta]\mathbf{W})(\cdot, 0). \end{aligned}$$

On définit de même l'opérateur $\mathbf{L}[\delta]$ induit par l'opérateur \mathbf{L} , défini par l'identité (4.19), de la façon suivante

$$\mathbf{L}[\delta] = \mathbf{R}[\delta] - \kappa^2 \left(\frac{i}{\delta^2} + 1 \right) \mathbf{I}. \quad (4.26)$$

Ainsi, dans un système de coordonnées normales (y_α, Y_3) , on a

$$\begin{cases} \mathbf{R}[\delta](y_\alpha, Y_3; D_\alpha, \partial_3) = \mathbf{R}(y_\alpha, \delta Y_3; D_\alpha, \delta^{-1} \partial_3) \\ \mathbf{L}[\delta](y_\alpha, Y_3; D_\alpha, \partial_3) = \mathbf{L}(y_\alpha, \delta Y_3; D_\alpha, \delta^{-1} \partial_3) \\ \operatorname{div}[\delta](y_\alpha, Y_3; D_\alpha, \partial_3) = \operatorname{div}(y_\alpha, \delta Y_3; D_\alpha, \delta^{-1} \partial_3) \\ \mathbf{B}[\delta](y_\alpha, Y_3; D_\alpha, \partial_3) = \mathbf{B}(y_\alpha, \delta Y_3; D_\alpha, \delta^{-1} \partial_3) \end{cases} \quad (4.27)$$

L'opérateur $\mathbf{B}[\delta]$ est polynomial en δ .

Proposition 4.9 *Pour tout $n \in \{0, 1\}$, il existe un opérateur \mathbf{B}^n indépendant de δ*

$$\mathbf{B}^n : \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1\Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \rightarrow \Gamma(T_1\Sigma_0)$$

tel que

$$\mathbf{B}[\delta] = \delta^{-1}\mathbf{B}^0 + \mathbf{B}^1. \quad (4.28)$$

PREUVE. On peut facilement expliciter les expressions des opérateurs \mathbf{B}^0 et \mathbf{B}^1 . En effet, d'après les identités du système (4.22), il vient

$$B_\alpha[\delta](\mathbf{W}) = \delta^{-1}\partial_3 W_\alpha - \partial_\alpha W_3 \quad (4.29)$$

On en déduit les termes du développement de l'opérateur $B_\alpha[\delta]$

$$\begin{cases} B_\alpha^0(\mathbf{W}) = \partial_3 W_\alpha \\ B_\alpha^1(\mathbf{W}) = -\partial_\alpha W_3 \end{cases} \quad (4.30)$$

■

Le résultat suivant est un théorème d'existence de développement en série entière en δ de l'opérateur de Maxwell associé aux opérateurs $\mathbf{R}[\delta]$, $\mathbf{L}[\delta]$ et $\text{div}[\delta]$, voir [25] pour l'opérateur de l'élasticité linéaire.

Théorème 4.10 *Les opérateurs $\mathbf{R}[\delta]$, $\mathbf{L}[\delta]$ et $\text{div}[\delta]$ sont développables en séries entières en δ . Il existe des opérateurs*

$$\mathbf{R}^n : \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1\Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1\Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)),$$

$$\mathbf{L}^n : \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1\Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1\Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)),$$

et

$$\text{div}^n : \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1\Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0))$$

tels que

$$\mathbf{R}[\delta] = \delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{R}^n, \quad \mathbf{L}[\delta] = \delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{L}^n \quad \text{et} \quad \text{div}[\delta] = \delta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \text{div}^n. \quad (4.31)$$

D'après l'identité (4.26), il vient

$$\begin{cases} \mathbf{L}^0 = \mathbf{R}^0 - i\kappa^2 \mathbf{I} \\ \mathbf{L}^2 = \mathbf{R}^2 - \kappa^2 \mathbf{I} \\ \mathbf{L}^n = \mathbf{R}^n \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 2\} \end{cases} \quad (4.32)$$

et le développement de l'opérateur $\mathbf{R}[\delta]$ permet donc d'en déduire celui de l'opérateur $\mathbf{L}[\delta]$. Dans la suite de ce chapitre, on explicite les expressions des opérateurs \mathbf{R}^n et div^n pour tout $n \in \mathbf{N}$.

4.4 Développements en séries des tenseurs fondamentaux

Dans cette section, on donne les développements en séries en δ des tenseurs de changement de métrique et de courbure surfacique après changement d'échelle.

4.4.1 Tenseur de changement de métrique

Le tenseur de changement de métrique surfacique $\gamma_{\alpha\beta}(h)$ induit un opérateur $\gamma_{\alpha\beta}[\delta]$ après le changement d'échelle (4.11). De même, le tenseur de changement de métrique transverses $\gamma_{\alpha 3}(h)$ induit un opérateur $\gamma_{\alpha 3}[\delta]$ après changement d'échelle. Ces opérateurs agissent sur l'espace $\mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1\Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0))$. Dans la suite de cette sous-section, on fixe un élément

$$\mathbf{W} \in \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1\Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0))$$

que l'on suppose indépendant de δ . Le but de ce paragraphe est de déterminer les développements en série entière en δ des tenseurs $\gamma_{\alpha\beta}[\delta](\mathbf{W})$, $\gamma_\beta^\alpha[\delta](\mathbf{W})$ et $\gamma_{\alpha 3}[\delta](\mathbf{W})$.

Développement en série de $\gamma_{\alpha\beta}[\delta](\mathbf{W})$

L'équation (3.22) montre qu'après changement d'échelle, on a

$$\gamma_{\alpha\sigma}[\delta](\mathbf{W}) = \frac{1}{2}(D_\alpha[\delta]W_\sigma + D_\sigma[\delta]W_\alpha) - b_{\alpha\sigma}[\delta]W_3. \quad (4.33)$$

Or, d'après l'identité (4.79), il vient

$$b_{\alpha\sigma}[\delta]W_3 = b_{\alpha\sigma}W_3 - \delta Y_3 c_{\alpha\sigma}W_3,$$

où $c_{\alpha\sigma} = b_\alpha^\gamma b_{\gamma\sigma}$.

Notation 4.11 On note $D[\delta]$ la dérivée covariante D^h après le changement d'échelle (4.14).

D'après l'identité (4.10), il vient

$$D_\alpha[\delta]W_\beta = D_\alpha W_\beta - (\mu^{-1})_\gamma^\sigma[\delta]W_\sigma D_\alpha \mu_\beta^\gamma[\delta], \quad (4.34)$$

et d'après la définition 4.1 et la proposition 4.3, il vient

$$\mu_\beta^\nu[\delta] = \delta_\beta^\nu - \delta Y_3 b_\beta^\nu \quad \text{et} \quad (\mu^{-1})_\beta^\nu[\delta] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n Y_3^n (b^n)_\beta^\nu. \quad (4.35)$$

de sorte que

$$D_\alpha[\delta]W_\beta = D_\alpha W_\beta + \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{n+1} Y_3^{n+1} (b^n)_\gamma^\sigma W_\sigma D_\alpha b_\beta^\gamma. \quad (4.36)$$

Donc,

$$\begin{cases} (\gamma_{\alpha\sigma}[\delta](\mathbf{W}))^0 = \gamma_{\alpha\sigma}(\mathbf{W}) \\ (\gamma_{\alpha\sigma}[\delta](\mathbf{W}))^1 = Y_3[\frac{1}{2}(b^0)_\gamma^\nu W_\nu (D_\alpha b_\sigma^\gamma + D_\sigma b_\alpha^\gamma) - c_{\alpha\sigma} W_3] \\ (\gamma_{\alpha\sigma}[\delta](\mathbf{W}))^n = \frac{1}{2} Y_3^n (b^{n-1})_\gamma^\nu W_\nu (D_\alpha b_\sigma^\gamma + D_\sigma b_\alpha^\gamma) \quad \text{pour tout } n \geq 2 \end{cases}$$

où la notation $(\gamma_{\alpha\sigma}[\delta](\mathbf{W}))^n$ désigne le coefficient devant δ^n dans le développement en série entière de $\gamma_{\alpha\sigma}[\delta](\mathbf{W})$, de sorte que :

$$\gamma_{\alpha\sigma}[\delta](\mathbf{W}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n (\gamma_{\alpha\sigma}[\delta](\mathbf{W}))^n \quad (4.37)$$

En utilisant la relation de Codazzi-Mainardi, voir [25],

$$D_\sigma b_\alpha^\gamma = D_\alpha b_\sigma^\gamma$$

et comme $(b^0)_\gamma^\nu = \delta_\gamma^\nu$, il vient

$$\begin{cases} (\gamma_{\alpha\sigma}[\delta](\mathbf{W}))^0 = \gamma_{\alpha\sigma}(\mathbf{W}) \\ (\gamma_{\alpha\sigma}[\delta](\mathbf{W}))^1 = Y_3[W_\gamma D_\alpha b_\sigma^\gamma - c_{\alpha\sigma} W_3] \\ (\gamma_{\alpha\sigma}[\delta](\mathbf{W}))^n = Y_3^n (b^{n-1})_\gamma^\nu W_\nu D_\alpha b_\sigma^\gamma \quad \text{pour tout } n \geq 2 \end{cases} \quad (4.38)$$

Développement en série du tenseur $\gamma_\beta^\alpha[\delta](\mathbf{W})$

On peut maintenant calculer l'expression du champ de tenseurs

$$\gamma_\beta^\alpha[\delta](\mathbf{W}) = a^{\alpha\sigma}[\delta] \gamma_{\sigma\beta}[\delta](\mathbf{W}) \quad (4.39)$$

En effectuant le produit de Cauchy de deux séries entières convergentes, on a

$$\gamma_\beta^\alpha[\delta](\mathbf{W}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sum_{k=0}^n (a^{\alpha\sigma}[\delta])^{n-k} (\gamma_{\sigma\beta}[\delta](\mathbf{W}))^k \quad (4.40)$$

puis d'après l'Exemple 3, il vient

$$\gamma_\beta^\alpha[\delta](\mathbf{W}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sum_{k=0}^n (n-k+1) Y_3^{n-k} (b^{n-k})^{\alpha\sigma} (\gamma_{\sigma\beta}[\delta](\mathbf{W}))^k$$

où les termes $(\gamma_{\sigma\beta}[\delta](\mathbf{W}))^k$ sont donnés par les équations (4.38). En particulier

$$\gamma_{\beta}^{\alpha}[\delta](\mathbf{W}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n (\gamma_{\beta}^{\alpha}[\delta](\mathbf{W}))^n \quad (4.41)$$

où

$$\begin{cases} (\gamma_{\beta}^{\alpha}[\delta](\mathbf{W}))^0 = \gamma_{\beta}^{\alpha}(\mathbf{W}) \\ (\gamma_{\beta}^{\alpha}[\delta](\mathbf{W}))^1 = Y_3[g^{\alpha\sigma}W_{\gamma}D_{\beta}b_{\sigma}^{\gamma} - c_{\beta}^{\alpha}W_3 + 2b^{\alpha\sigma}\gamma_{\sigma\beta}(\mathbf{W})] \\ (\gamma_{\beta}^{\alpha}[\delta](\mathbf{W}))^n = Y_3^n \sum_{k=0}^n (n-k+1)(b^{n-k})^{\alpha\sigma}(b^{k-1})_{\gamma}^{\nu}W_{\nu}D_{\sigma}b_{\beta}^{\gamma} \quad \text{pour tout } n \geq 2 \end{cases} \quad (4.42)$$

Développement en série du tenseur $\gamma_{\alpha 3}[\delta](\mathbf{W})$

D'après l'identité (3.22), il vient

$$\gamma_{\alpha 3}[\delta](\mathbf{W}) = \frac{1}{2}(\partial_{\alpha}W_3 + \delta^{-1}\partial_3W_{\alpha}) + b_{\alpha}^{\beta}[\delta]W_{\beta} \quad (4.43)$$

Ainsi, d'après l'exemple 3, le tenseur $\gamma_{\alpha 3}[\delta]$ est développable en série entière et on a

$$\gamma_{\alpha 3}[\delta](\mathbf{W}) = \delta^{-1}(\gamma_{\alpha 3}(\mathbf{W}))^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n Y_3^n (\gamma_{\alpha 3}(\mathbf{W}))^n \quad (4.44)$$

où

$$(\gamma_{\alpha 3}(\mathbf{W}))^{-1} = \frac{1}{2}\partial_3W_{\alpha}, \quad (\gamma_{\alpha 3}(\mathbf{W}))^0 = \frac{1}{2}\partial_{\alpha}W_3 + b_{\alpha}^{\beta}W_{\beta} \quad (4.45)$$

et, pour tout $n \geq 1$

$$(\gamma_{\alpha 3}(\mathbf{W}))^n = (b^{n+1})_{\alpha}^{\beta}W_{\beta}. \quad (4.46)$$

4.4.2 Développement en série du tenseur de courbure surfacique

Soit $\rho_{\alpha\beta}[\delta]$ l'opérateur induit par le tenseur de courbure surfacique $\rho_{\alpha\beta}(h)$ après le changement d'échelle (4.11). On introduit le tenseur suivant

$$\theta_{\alpha}(h)(\mathbf{E}) = D_{\alpha}^h E_3 + b_{\alpha}^{\beta}(h)E_{\beta}. \quad (4.47)$$

D'après l'équation (3.23), il vient

$$\rho_{\alpha}^{\alpha}(h)(\mathbf{E}) = D^{\alpha}(h)\theta_{\alpha}(h)(\mathbf{E}) + b_{\beta}^{\alpha}(h)\gamma_{\alpha}^{\beta}(h)(\mathbf{E}). \quad (4.48)$$

La démonstration du résultat précédent est explicitée dans [25, chap.2, 4.1]. Ainsi,

$$\rho_\alpha^\alpha[\delta](\mathbf{W}) = D^\alpha[\delta]\theta_\alpha[\delta](\mathbf{W}) + b_\beta^\alpha[\delta]\gamma_\alpha^\beta[\delta](\mathbf{W}). \quad (4.49)$$

D'une part, en effectuant le produit de Cauchy de $b_\beta^\alpha[\delta]$ et $\gamma_\alpha^\beta[\delta](\mathbf{W})$, il vient

$$b_\beta^\alpha[\delta]\gamma_\alpha^\beta[\delta](\mathbf{W}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \sum_{k=0}^n (\gamma_\alpha^\beta[\delta](\mathbf{W}))^k Y_3^{n-k} (b^{n-k+1})_\beta^\alpha. \quad (4.50)$$

où le terme $(\gamma_\alpha^\beta[\delta](\mathbf{W}))^k$ est donné par (4.42). En particulier, il vient

$$\begin{cases} (b_\beta^\alpha[\delta]\gamma_\alpha^\beta[\delta](\mathbf{W}))^0 = b_\beta^\alpha\gamma_\alpha^\beta(\mathbf{W}) \\ (b_\beta^\alpha[\delta]\gamma_\alpha^\beta[\delta](\mathbf{W}))^1 = (\gamma_\alpha^\beta[\delta](\mathbf{W}))^1 b_\beta^\alpha + Y_3(b^2)_\beta^\alpha\gamma_\alpha^\beta(\mathbf{W}) \end{cases} \quad (4.51)$$

D'autre part, d'après l'identité (4.47), il vient

$$D^\alpha[\delta]\theta_\alpha[\delta](\mathbf{W}) = g^{\alpha\beta}[\delta]D_\alpha[\delta]D_\beta[\delta]W_3 + g^{\alpha\beta}[\delta]D_\beta[\delta](b_\alpha^\gamma[\delta]W_\gamma). \quad (4.52)$$

Or, dans un système de coordonnées normales, on a

$$D_\beta[\delta]W_3 = D_\beta W_3 = \partial_\beta W_3. \quad (4.53)$$

De plus, en appliquant l'identité (4.36) au champ de vecteur $\partial_\beta W_3$ à la place de W_β , on a

$$D_\alpha[\delta]\partial_\beta W_3 = D_\alpha\partial_\beta W_3 + \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{n+1} Y_3^{n+1} (b^n)_\gamma^\sigma \partial_\sigma W_3 D_\alpha b_\beta^\gamma \quad (4.54)$$

soit encore

$$D_\alpha[\delta]\partial_\beta W_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n Y_3^n (D_\alpha[\delta]\partial_\beta W_3)^n. \quad (4.55)$$

Donc,

$$g^{\alpha\beta}[\delta]D_\alpha[\delta]D_\beta[\delta]W_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n Y_3^n \sum_{k=0}^n (n-k+1)(b^{n-k})^{\alpha\beta} (D_\alpha[\delta]\partial_\beta W_3)^k. \quad (4.56)$$

D'autre part, d'après l'identité (4.10), il vient

$$D_\beta[\delta]b_\alpha^\nu[\delta]W_\nu = D_\beta b_\alpha^\nu[\delta]W_\nu - (\mu^{-1})_\gamma^\sigma[\delta]b_\sigma^\nu[\delta]W_\nu D_\beta \mu_\alpha^\gamma[\delta],$$

d'où

$$g^{\alpha\beta}[\delta]D_\beta[\delta]b_\alpha^\nu[\delta]W_\nu = g^{\alpha\beta}[\delta]D_\beta b_\alpha^\nu[\delta]W_\nu + \delta Y_3 g^{\alpha\beta}[\delta](\mu^{-1})_\gamma^\sigma[\delta]b_\sigma^\nu[\delta]W_\nu D_\beta b_\alpha^\gamma[\delta], \quad (4.57)$$

qu'on peut aussi développer en série entière en δ , car

$$g^{\alpha\beta}[\delta]D_\beta b_\alpha^\nu[\delta]W_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n Y_3^n \sum_{k=0}^n (k+1)(b^k)^{\alpha\beta} D_\alpha (b^{n-k+1})_\alpha^\nu W_\nu, \quad (4.58)$$

et

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta}[\delta](\mu^{-1})_\gamma^\sigma[\delta]b_\sigma^\nu[\delta]W_\nu &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n Y_3^n \sum_{k+l+m=n} (k+1)(b^k)^{\alpha\beta}(b^l)_\gamma^\sigma(b^{m+1})_\sigma^\nu W_\nu \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n Y_3^n \sum_{k+l=n} (k+1)(b^k)^{\alpha\beta}(b^{l+1})_\gamma^\nu W_\nu. \end{aligned} \quad (4.59)$$

On en déduit un développement en série du terme

$$g^{\alpha\beta}[\delta]D_\beta[\delta]b_\alpha^\gamma[\delta]W_\gamma \quad (4.60)$$

ainsi que l'identité suivante

$$\rho_\alpha^\alpha[\delta](\mathbf{W}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n Y_3^n (\rho_\alpha^\alpha[\delta](\mathbf{W}))^n. \quad (4.61)$$

En particulier, on a

$$(\rho_\alpha^\alpha[\delta](\mathbf{W}))^0 = D^\alpha \partial_\alpha W_3 + D^\alpha b_\alpha^\beta W_\beta + b_\beta^\alpha \gamma_\alpha^\beta(\mathbf{W}). \quad (4.62)$$

4.5 Développements des opérateurs

L'objet de ce paragraphe consiste à exprimer les développements en série entière en δ des opérateurs $\mathbf{R}[\delta]$, $\mathbf{L}[\delta]$ et div^n . Dans la suite, on fixe $\mathbf{W} \in \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0))$ indépendant de δ .

4.5.1 Réécriture des opérateurs

Dans un système de coordonnées normales, on a

$$D_\alpha[\delta]W_3 = D_\alpha W_3 = \partial_\alpha W_3$$

et

$$D_\alpha[\delta]\gamma_\nu^\nu[\delta](\mathbf{W}) = D_\alpha \gamma_\nu^\nu[\delta](\mathbf{W})$$

voir [25]. Ainsi, d'après les définitions (4.17) et (4.22) des opérateurs \mathbf{R} et \mathbf{B} , il vient

$$\begin{cases} R_\alpha[\delta](\mathbf{W}) = -2\delta^{-1}\partial_3\gamma_{\alpha 3}[\delta](\mathbf{W}) + 2\delta^{-1}\partial_3\partial_\alpha W_3 + 2b_\beta^\beta[\delta]\gamma_{\alpha 3}[\delta](\mathbf{W}) \\ \quad + 2D_\alpha\gamma_\nu^\nu[\delta](\mathbf{W}) - 2D_\beta[\delta]\gamma_\alpha^\beta[\delta](\mathbf{W}) \\ R_3[\delta](\mathbf{W}) = \delta^{-1}\partial_3\gamma_\alpha^\alpha[\delta](\mathbf{W}) + \delta^{-1}b_\alpha^\alpha[\delta]\partial_3 W_3 - \rho_\alpha^\alpha[\delta](\mathbf{W}) \end{cases} \quad (4.63)$$

Enfin, d'après l'identité (4.20), il vient

$$\operatorname{div}[\delta]\mathbf{W} = \delta^{-1}\partial_3 W_3 + \gamma_\alpha^\alpha[\delta](\mathbf{W}). \quad (4.64)$$

Dans la suite de ce paragraphe, on utilise les identités de la section précédente pour développer ces équations selon les puissances de δ .

4.5.2 Développements des opérateurs transverses

On commence par développer les opérateurs $R_3[\delta](\mathbf{W})$, où \mathbf{W} est indépendant de δ . D'après le développement en série de $\gamma_\alpha^\beta[\delta](\mathbf{W})$ et les séries d'équations (4.42), il vient

$$\gamma_\alpha^\alpha[\delta](\mathbf{W}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n Y_3^n (\gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{W}))^n \quad (4.65)$$

où

$$\begin{cases} (\gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{W}))^0 = \gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{W}) \\ (\gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{W}))^1 = g^{\alpha\sigma} W_\gamma D_\beta b_\sigma^\gamma - c_\beta^\alpha W_3 + 2b^{\alpha\sigma} \gamma_{\sigma\beta}(\mathbf{W}) \\ (\gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{W}))^n = \sum_{k=0}^n (n-k+1) (b^{n-k})^{\alpha\sigma} (b^{k-1})_\gamma^\nu W_\nu D_\sigma b_\beta^\gamma \quad \text{pour tout } n \geq 2 \end{cases} \quad (4.66)$$

Ainsi, on a la relation suivante

$$\partial_3 \gamma_\alpha^\alpha[\delta](\mathbf{W}) = \partial_3 (\gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{W})) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \partial_3 (Y_3^n (\gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{W}))^n).$$

De plus, d'après l'équation (4.9), il vient

$$b_\alpha^\alpha[\delta]\partial_3 W_3 = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n Y_3^n (b^{n+1})_\alpha^\alpha \partial_3 W_3. \quad (4.67)$$

Donc d'après les équations (4.65), (4.67) et (4.61), le développement en série entière du terme $R_3[\delta](\mathbf{W})$ s'écrit

$$R_3[\delta](\mathbf{W}) = \delta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \partial_3 (Y_3^n (\gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{W}))^n) + \delta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n (b^{n+1})_\alpha^\alpha \partial_3 (Y_3^n W_3) - \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n Y_3^n (\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{W}))^n. \quad (4.68)$$

En particulier, en identifiant selon les premières puissances de δ dans (4.68), il vient

$$\begin{aligned} R_3^0(\mathbf{W}) &= 0 \\ R_3^1(\mathbf{W}) &= \gamma_\alpha^\alpha(\partial_3(\mathbf{W})) + b_\alpha^\alpha \partial_3 W_3 \\ R_3^{n+1}(\mathbf{W}) &= \partial_3 (Y_3^n (\gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{W}))^n) + (b^{n+1})_\alpha^\alpha \partial_3 (Y_3^n W_3) - Y_3^{n-1} (\rho_\alpha^\alpha(\mathbf{W}))^{n-1}, \quad n \geq 1 \end{aligned} \quad (4.69)$$

Remarque 4.12 On a utilisé ici le fait que ∂_3 commute avec les opérateurs $2D$, de sorte que

$$\partial_3 \gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{W}) = \gamma_\alpha^\alpha(\partial_3(\mathbf{W})).$$

4.5.3 Développements des opérateurs surfaciques

D'après l'identité (4.44), il vient

$$\partial_3 \gamma_{\alpha 3}[\delta](\mathbf{W}) = \frac{1}{2} \delta^{-1} \partial_3^2 W_\alpha + \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \partial_3 (Y_3^n (\gamma_{\alpha 3}(\mathbf{W}))^n). \quad (4.70)$$

En effectuant le produit de Cauchy des deux séries entières $b_\beta^\beta[\delta]$ et $\gamma_{\alpha 3}[\delta](\mathbf{W})$, d'après l'exemple 3 et l'identité (4.44), il vient

$$b_\beta^\beta[\delta] \gamma_{\alpha 3}[\delta](\mathbf{W}) = \delta^{-1} b_\beta^\beta (\gamma_{\alpha 3}(\mathbf{W}))^{-1} + \delta^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n Y_3^n \sum_{k=0}^n (b^{k+1})_\beta^\beta W_3 (\gamma_{\alpha 3}(\mathbf{W}))^{n-1-k}. \quad (4.71)$$

De plus, d'après le développement en série entière (4.41) du terme $\gamma_\beta^\alpha[\delta](\mathbf{W})$, il vient

$$D_\alpha \gamma_\nu^\nu[\delta](\mathbf{W}) = D_\alpha \gamma_\nu^\nu(\mathbf{W}) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n Y_3^n D_\alpha (\gamma_\nu^\nu(\mathbf{W}))^n. \quad (4.72)$$

La quantité $D_\beta[\delta]\gamma_\alpha^\beta[\delta](\mathbf{W})$ est plus compliquée à développer. On peut démontrer que, voir [25]

$$\begin{aligned} (D_\beta[\delta]\gamma_\alpha^\beta[\delta](\mathbf{W}))^n &= D_\beta(\gamma_\alpha^\beta[\delta](\mathbf{W}))^n + \sum_{k=1}^n Y_3^k (b^{k-1})_\nu^\delta W_3 (\gamma_\delta^\beta[\delta](\mathbf{W}))^{n-k} D_\beta b_\alpha^\nu \\ &\quad - \sum_{k=1}^n Y_3^k (b^{k-1})_\nu^\beta W_3 (\gamma_\alpha^\delta[\delta](\mathbf{W}))^{n-k} D_\beta b_\delta^\nu. \end{aligned} \quad (4.73)$$

D'après les équations (4.70), (4.71), (4.72) et (4.73), on en déduit le développement de $R_\alpha[\delta](\mathbf{W})$, voir (4.63)

$$\begin{aligned} R_\alpha[\delta](\mathbf{W}) &= -\delta^{-2} \partial_3^2 W_\alpha \\ &\quad + 2\delta^{-1} \left(-\partial_3((\gamma_{\alpha 3}(\mathbf{W}))^0) + \partial_3 \partial_\alpha W_3 + b_\beta^\beta (\gamma_{\alpha 3}(\mathbf{W}))^{-1} \right) \\ &\quad - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta^{n-1} \left(\partial_3 (Y_3^n (\gamma_{\alpha 3}(\mathbf{W}))^n) - Y_3^n W_3 \sum_{k=1}^{n+1} (b^k)_\beta^\beta (\gamma_{\alpha 3}(\mathbf{W}))^{n-k} \right) \\ &\quad + 2 \left(D_\alpha \gamma_\nu^\nu(\mathbf{W}) + \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n Y_3^n D_\alpha (\gamma_\nu^\nu(\mathbf{W}))^n - \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n (D_\beta[\delta]\gamma_\alpha^\beta[\delta](\mathbf{W}))^n \right) \end{aligned} \quad (4.74)$$

En particulier, les deux premiers termes du développement de $R_\alpha[\delta]$ sont les suivants

$$\begin{cases} R_\alpha^0(\mathbf{W}) = -\partial_3^2 W_\alpha \\ R_\alpha^1(\mathbf{W}) = 2 \left(-\partial_3((\gamma_{\alpha 3}(\mathbf{W}))^0) + \partial_3 \partial_\alpha W_3 + b_\beta^\beta (\gamma_{\alpha 3}(\mathbf{W}))^{-1} \right) \end{cases} \quad (4.75)$$

D'après les identités (4.44) et (4.45), il vient

$$\begin{aligned} R_\alpha^1(\mathbf{W}) &= -2\partial_3 \left(\frac{1}{2} \partial_\alpha W_3 + b_\alpha^\beta W_\beta \right) + 2\partial_3 \partial_\alpha W_3 + b_\beta^\beta \partial_3 W_\alpha \\ &= -2\partial_3 (b_\alpha^\beta W_\beta) + \partial_3 \partial_\alpha W_3 + b_\beta^\beta \partial_3 W_\alpha \end{aligned}$$

D'après les deux premières identités de (4.32), Il vient

$$\begin{cases} L_\alpha^0(\mathbf{W}) = -\partial_3^2 W_\alpha - i\kappa^2 W_\alpha \\ L_\alpha^1(\mathbf{W}) = -2b_\alpha^\beta \partial_3 W_\beta + \partial_3 \partial_\alpha W_3 + b_\beta^\beta \partial_3 W_\alpha \end{cases} \quad (4.76)$$

4.5.4 Développement de la divergence

D'après l'identité (4.41), il vient

$$\gamma_\alpha^\alpha[\delta](\mathbf{W}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n (\gamma_\alpha^\alpha[\delta](\mathbf{W}))^n$$

où les termes $(\gamma_\alpha^\alpha[\delta](\mathbf{W}))^n$ sont donnés par le système d'équations (4.66). Ainsi, par définition de l'opérateur $\text{div}[\delta]$, voir l'équation (4.64), on a

$$\text{div}[\delta]\mathbf{W} = \delta^{-1}\partial_3 W_3 + \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n (\gamma_\alpha^\alpha[\delta](\mathbf{W}))^n. \quad (4.77)$$

En particulier, on a

$$\begin{cases} \text{div}^0(\mathbf{W}) = \partial_3 W_3 \\ \text{div}^1(\mathbf{W}) = \gamma_\alpha^\alpha(\mathbf{W}) \\ \text{div}^{n+1}(\mathbf{W}) = (\gamma_\alpha^\alpha[\delta](\mathbf{W}))^n \quad \text{si } n \in \mathbb{N}^*. \end{cases} \quad (4.78)$$

4.5.5 Récapitulation

Dans ce paragraphe, on note $\mathbf{E}^{\text{cd}} \in \mathcal{C}^\infty(I, \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0))$ une solution des équations (3.50) et (3.51) du chapitre 3. A partir du changement d'échelle (4.11), on effectue le changement d'inconnue suivant

$$\mathbf{W}^{\text{cd}}(\cdot, Y_3) = \mathbf{E}^{\text{cd}}(\cdot, h).$$

Ainsi, on a $\mathbf{W}^{\text{cd}} \in \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0))$, et les équations posées à l'intérieur du domaine conducteur s'écrivent

$$\delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{R}^n(\mathbf{W}^{\text{cd}}) - \kappa^2 \left(1 + \frac{i}{\delta^2}\right) \mathbf{W}^{\text{cd}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_\delta \quad (4.79)$$

où les opérateurs \mathbf{R}^n sont explicités par leurs composantes transverses et surfaciques aux paragraphes 4.5.2 et 4.5.3. D'après l'identité (4.26), l'équation (4.79) s'écrit encore

$$\delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{L}^n(\mathbf{W}^{\text{cd}}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\delta. \quad (4.80)$$

De plus, les équations posées sur l'interface Σ s'écrivent

$$\delta^{-1} \mathbf{B}^0(\mathbf{W}^{\text{cd}}) + \mathbf{B}^1(\mathbf{W}^{\text{cd}}) = \mathbf{B}^{\text{is}}(\mathbf{E}^{\text{is}}) \quad \text{sur } \Sigma \quad (4.81)$$

où

$$\mathbf{B}^{\text{is}}(\mathbf{E}^{\text{is}}) = \text{rot } \mathbf{E}^{\text{is}} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \quad (4.82)$$

et où les opérateurs \mathbf{B}^n sont définis par leurs composantes surfaciques (4.30). Enfin, d'après l'identité (3.52), on a la relation

$$\delta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \text{div}^n(\mathbf{W}^{\text{cd}}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\delta. \quad (4.83)$$

où les opérateurs div^n sont définis par le système d'équations (4.78).

Chapitre 5

Développement asymptotique du champ électrique \mathbf{E}

5.1 Introduction

L'objet de ce cinquième chapitre consiste à calculer les termes d'un développement asymptotique du champ électrique, solution du problème variationnel (2.18)-(2.19) ou du problème (2.25)-(2.26). On utilise des techniques de développements multi-échelles, voir [42], [43, p.87-98], [25, chap.3], [64, 8], couplées avec un processus de résolution de problèmes de transmissions.

Ce chapitre est organisé de la façon suivante. On rappelle au paragraphe 5.2 le problème étudié, on effectue un Ansatz pour le développement asymptotique du champ électrique et on détermine les équations vérifiées par les termes de cet Ansatz. Dans la section 5.3, on explicite les premiers termes du développement asymptotique, puis on détermine la structure des termes génériques, voir la proposition 5.10 et la sous-section 5.3.5 pour des résultats précis. Dans une dernière partie, on démontre a posteriori que le développement asymptotique satisfait des relations de compatibilité, voir la section 5.4.

5.2 Présentation du problème

Dans ce chapitre, on s'intéresse au comportement asymptotique lorsque $\delta \rightarrow 0$ des solutions \mathbf{E}_δ du problème variationnel (2.18)-(2.19), qu'on rappelle ici :

Trouver $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$ tel que pour tout $\mathbf{E}'_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$,

$$\int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}'_\delta + \alpha \operatorname{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) \operatorname{div}(\overline{\varepsilon(\delta) \mathbf{E}'_\delta}) - \kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta \cdot \bar{\mathbf{E}}'_\delta \right) d\mathbf{x} = \langle f, \mathbf{E}'_\delta \rangle \quad (5.1)$$

où

$$\langle f, \mathbf{E}'_\delta \rangle = \int_{\Omega} (\mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{E}}'_\delta - \frac{\alpha}{\kappa^2} \operatorname{div} \mathbf{F} \operatorname{div}(\overline{\varepsilon(\delta)} \mathbf{E}'_\delta)) \, d\mathbf{x} \quad (5.2)$$

et où $\alpha > 0$ est un réel fixé, voir le théorème 2.21.

5.2.1 Cadre d'étude

Dans la suite de ce chapitre, on se place dans le cadre de l'hypothèse spectrale 2.24. On fixe une donnée $\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s-2}(\Omega)$, où $s \geq 2$, à support dans Ω_{is} telle que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ dans Ω . On rappelle que pour δ assez petit, d'après le théorème 2.25, le problème variationnel (5.1)-(5.2) admet une unique solution $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$. De plus, d'après le théorème 2.21, il vient

$$\operatorname{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta) = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad (5.3)$$

et donc

$$\forall \mathbf{E}'_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta) \quad \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}'_\delta - \kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta \cdot \bar{\mathbf{E}}'_\delta \right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{\text{is}}} \mathbf{F}^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{E}}'_\delta d\mathbf{x}. \quad (5.4)$$

Enfin, d'après la proposition 2.15, \mathbf{E}_δ satisfait l'équation suivante au sens des distributions

$$\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta - \kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta = \mathbf{F} \quad \text{dans } \Omega. \quad (5.5)$$

D'après la formule de Stokes, \mathbf{E}_δ satisfait la condition au bord de l'isolant parfait (2.2)

$$\mathbf{E}_\delta \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad (5.6)$$

voir la remarque 8.16. L'équation (5.3) est aussi une conséquence de l'équation (5.5). C'est une condition de compatibilité avec l'équation (5.5) qui sera développée au paragraphe 5.4. Après changement d'échelle (4.11) dans le voisinage tubulaire \mathcal{O} du domaine conducteur Ω_{cd} , et avec le changement d'inconnue

$$\mathbf{W}_\delta^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3) = \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O},$$

l'équation (5.5) s'écrit dans Ω_δ de la façon suivante

$$\delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{R}^n(\mathbf{W}_\delta^{\text{cd}}) - \kappa^2 \left(1 + \frac{i}{\delta^2}\right) \mathbf{W}_\delta^{\text{cd}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_\delta \quad (5.7)$$

voir (4.79), et d'après (4.81) on a la condition de transmission à l'interface

$$\delta^{-1} \mathbf{B}^0(\mathbf{W}_\delta^{\text{cd}}) + \mathbf{B}^1(\mathbf{W}_\delta^{\text{cd}}) = \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (5.8)$$

Dans la suite de ce chapitre, on considère une solution $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$ du problème (5.4). Les équations en coordonnées normales (y_α, Y_3) dans le domaine conducteur sont données par (5.7) et (5.8).

5.2.2 Ansatz

Vu la présence de puissances entières de δ dans les équations (5.4), (5.7) et (5.8), il est naturel d'effectuer l'Ansatz suivant

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\delta^{\text{is}}(\mathbf{x}) \sim \sum_{j \geq 0} \mathbf{E}_j^{\text{is}}(\mathbf{x}) \delta^j & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_{\text{is}} \\ \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}}(\mathbf{x}) \sim \sum_{j \geq 0} \mathbf{E}_j^{\text{cd}}(\mathbf{x}; \delta) \delta^j & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_{\text{cd}} \end{cases} \quad (5.9)$$

où

$$\mathbf{E}_j^{\text{cd}}(\mathbf{x}; \delta) = \mathbf{W}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{h}{\delta}) \in \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)), \quad \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O} \quad (5.10)$$

et

$$\mathbf{W}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad Y_3 \rightarrow +\infty. \quad (5.11)$$

On rappelle que (y_α, h) désigne un système de coordonnées normales dans \mathcal{O} , voir le chapitre 3, et $Y_3 = \frac{h}{\delta}$.

Remarque 5.1 (i) Les termes $\mathbf{E}_j^{\text{is}}(\mathbf{x})$ de l'Ansatz dans le domaine Ω_{is} sont indépendants de δ . Cependant, les termes $\mathbf{E}_j^{\text{cd}}(\mathbf{x}; \delta)$ de l'Ansatz dans le domaine Ω_{cd} dépendent de δ . D'après la relation (5.10), ce sont des termes profils dans la direction normale à l'interface Σ .

(ii) On a vu au chapitre 2 que la norme du champ électromagnétique décroît de façon exponentielle dans la direction normale à l'interface Σ à l'intérieur du domaine conducteur, voir le Théorème 2.43. La condition (5.11) est donc naturelle.

Notation 5.2 On note $\mathcal{W}_j^{\text{cd}} = (\mathbf{n} \times \mathbf{W}_j^{\text{cd}}) \times \mathbf{n}$ la composante surfacique du terme \mathbf{W}_j^{cd} et $w_j^{\text{cd}} = \mathbf{W}_j^{\text{cd}} \cdot \mathbf{n}$ sa composante transverse. Ainsi, on a

$$\mathcal{W}_j^{\text{cd}} = \mathcal{W}_{\alpha,j}^{\text{cd}} dy^\alpha$$

et on peut décomposer le terme \mathbf{W}_j^{cd} de la façon suivante

$$\mathbf{W}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3) = \mathcal{W}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3) + w_j^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3) \mathbf{n}.$$

Enfin, on note $\mathbf{E}_j^{\text{is}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{E}}_j^{\text{is}}(y_\alpha, 0)$ pour tout $\mathbf{x} \in \Sigma$.

5.2.3 Equations surfaciques dans le domaine conducteur

En effectuant le produit de Cauchy de la série formelle $\sum_{n \geq 0} \delta^n \mathbf{L}^n$ associée à l'opérateur $\mathbf{L}[\delta]$, défini par l'identité (4.26), avec la série formelle $\sum_{j \geq 0} \mathbf{W}_j^{\text{cd}} \delta^j$, voir [25], il vient

$$\left(\sum_{n \geq 0} \delta^n \mathbf{L}^n \right) \left(\sum_{j \geq 0} \delta^j \mathbf{W}_j^{\text{cd}} \right) = \sum_{n \geq 0} \delta^n \left[\sum_{l=0}^n \mathbf{L}^{n-l} \mathbf{W}_l^{\text{cd}} \right].$$

On substitue l'Ansatz (5.9) dans l'identité (5.7) puis on identifie les composantes surfaciques des termes selon les puissances de δ . Alors, d'après les relations (4.76), on a les équations suivantes posées dans $\Omega_0 = \Sigma \times I$ où $I = (0, \infty)$

$$\begin{cases} -\partial_3^2 \mathcal{W}_{\alpha,0}^{\text{cd}} - i\kappa^2 \mathcal{W}_{\alpha,0}^{\text{cd}} = 0 \\ -\partial_3^2 \mathcal{W}_{\alpha,1}^{\text{cd}} - i\kappa^2 \mathcal{W}_{\alpha,1}^{\text{cd}} - 2b_\alpha^\beta \partial_3 \mathcal{W}_{\beta,0}^{\text{cd}} + \partial_3 \partial_\alpha w_0^{\text{cd}} + b_\beta^\beta \partial_3 \mathcal{W}_{\alpha,0}^{\text{cd}} = 0 \\ -\partial_3^2 \mathcal{W}_{\alpha,n}^{\text{cd}} - i\kappa^2 \mathcal{W}_{\alpha,n}^{\text{cd}} + \sum_{l=0}^{n-1} L_\alpha^{n-l}(\mathbf{W}_l^{\text{cd}}) = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 2 \end{cases} \quad (5.12)$$

En effectuant le produit de Cauchy de l'opérateur $\sum_{n=0}^1 \delta^n \mathbf{B}^n$ et de la série formelle $\sum_{j \geq 0} \mathbf{W}_j^{\text{cd}} \delta^j$, il vient

$$\left(\sum_{n=0}^1 \delta^n \mathbf{B}^n \right) \left(\sum_{j \geq 0} \delta^j \mathbf{W}_j^{\text{cd}} \right) = \sum_{n \geq 0} \delta^n \left[\sum_{l=0}^1 \mathbf{B}^l \mathbf{W}_{n-l}^{\text{cd}} \right]$$

avec la convention $\mathbf{W}_{-1}^{\text{cd}} = 0$. De plus,

$$\mathbf{B}^{\text{is}} \left(\sum_{j \geq 0} \delta^j \tilde{\mathbf{E}}_j^{\text{is}} \right) = \sum_{n \geq 0} \delta^n \mathbf{B}^{\text{is}} \tilde{\mathbf{E}}_n^{\text{is}}$$

où l'opérateur \mathbf{B}^{is} est défini par l'identité (4.82). Ainsi, en substituant l'Ansatz (5.9) dans l'identité (5.8), puis en identifiant les termes selon les puissances de δ , d'après le système d'équations (4.30) on en déduit les équations suivantes posées sur l'interface Σ

$$\begin{cases} \partial_3 \mathcal{W}_{\alpha,0}^{\text{cd}} = 0 \\ \partial_3 \mathcal{W}_{\alpha,j+1}^{\text{cd}} - \partial_\alpha w_j^{\text{cd}} = (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_j^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\alpha \quad \text{pour tout } j \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (5.13)$$

5.2.4 Equations transverses dans le domaine conducteur

On substitue l'Ansatz (5.9) dans l'identité (5.7) et on identifie les composantes transverses des termes selon les puissances de δ . Alors d'après les séries d'équations (4.32) et (4.69), on a les relations suivantes posées dans Ω_0

$$\left\{ \begin{array}{l} -i\kappa^2 w_0^{\text{cd}} = 0 \\ -i\kappa^2 w_1^{\text{cd}} + \gamma_\alpha^\alpha (\partial_3(\mathbf{W}_0^{\text{cd}})) + b_\alpha^\alpha \partial_3 w_0^{\text{cd}} = 0 \\ -i\kappa^2 w_2^{\text{cd}} + \gamma_\alpha^\alpha (\partial_3(\mathbf{W}_1^{\text{cd}})) + b_\alpha^\alpha \partial_3 w_1^{\text{cd}} \\ \quad + \partial_3 \left(Y_3 (\gamma_\alpha^\alpha (\mathbf{W}_0^{\text{cd}}))^1 \right) + (b^2)_\alpha^\alpha \partial_3 (Y_3 w_0^{\text{cd}}) - \rho_\alpha^\alpha (\mathbf{W}_0^{\text{cd}}) - \kappa^2 w_0^{\text{cd}} = 0 \\ -i\kappa^2 w_n^{\text{cd}} + \sum_{k=0}^{n-1} L_3^{n-k} (\mathbf{W}_k^{\text{cd}}) = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 3 \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Les séries d'équations (5.12), (5.13) et (5.14) permettent de déterminer explicitement les premiers termes du développement asymptotique, voir le paragraphe 5.3 pour les résultats.

5.2.5 Equations dans le domaine isolant

On rappelle que l'espace fonctionnel $\mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$ a déjà été introduit à la définition 2.4. On définit à présent l'espace fonctionnel suivant

$$\mathbf{X}_{\text{T}}^{\partial\Omega}(\Omega_{\text{is}}) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{X}(\Omega_{\text{is}}) \mid \mathbf{u}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \}. \quad (5.15)$$

On introduit un opérateur Φ_Σ^{is} de relèvement de traces tangentielles sur Σ dans le domaine isolant Ω_{is}

$$\Phi_\Sigma^{\text{is}} : \mathbf{H}^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma) \rightarrow \mathbf{H}^s(\Omega_{\text{is}})$$

où s est un réel fixé assez grand. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}$, si $\mathbf{E}_j^{\text{cd}} \times \mathbf{n} \in \mathbf{H}^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma)$, alors

$$\mathbf{u}_j^{\text{is}} := \Phi_\Sigma^{\text{is}}(\mathbf{E}_j^{\text{cd}} \times \mathbf{n}) \in \mathbf{H}^s(\Omega_{\text{is}}) \quad \text{vérifie} \quad \mathbf{u}_j^{\text{is}} \times \mathbf{n} = \mathbf{E}_j^{\text{cd}} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma.$$

On utilisera par la suite que cet opérateur Φ_Σ^{is} est continu. On suppose à présent que la donnée \mathbf{F} du problème (5.4) est indépendante de δ . En substituant l'Ansatz (5.9) dans l'équation (5.4) puis en identifiant les termes selon les puissances de δ , on est ramené à résoudre les problèmes suivants posés dans le domaine isolant :

Trouver $\mathbf{E}_0^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\text{T}}^{\partial\Omega}(\Omega_{\text{is}})$, avec $\mathbf{E}_0^{\text{is}} - \Phi_\Sigma^{\text{is}}(\mathbf{E}_0^{\text{cd}} \times \mathbf{n}) \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$, tel que

$$\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}}), \int_{\Omega_{\text{is}}} \frac{1}{\mu} (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \mathbf{E}_0^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{E}}') \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{\text{is}}} \mathbf{F}^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{E}}' \, d\mathbf{x} \quad (5.16)$$

et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

Trouver $\mathbf{E}_j^{\text{is}} \in \mathbf{X}_T^{\partial\Omega}(\Omega_{\text{is}})$, avec $\mathbf{E}_j^{\text{is}} - \Phi_{\Sigma}^{\text{is}}(\mathbf{E}_j^{\text{cd}} \times \mathbf{n}) \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$, tel que

$$\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}}), \int_{\Omega_{\text{is}}} (\text{rot } \mathbf{E}_j^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \mathbf{E}_j^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{E}}') \, d\mathbf{x} = 0. \quad (5.17)$$

5.3 Construction des termes du développement asymptotique

Dans ce paragraphe, on construit successivement les termes du développement asymptotique du champ électrique. On démontre dans cette section que les termes \mathbf{W}_j^{cd} sont des produits d'exponentielles décroissantes en la variable Y_3 par des polynômes en Y_3 . On rappelle que I désigne l'intervalle $(0, \infty)$.

5.3.1 Termes d'ordre 0

Terme d'ordre 0 dans le domaine conducteur Ω_{cd}

D'après la première équation du système (5.14), on a $w_0^{\text{cd}} = 0$ dans Ω_0 . D'après les premières équations des systèmes (5.12) et (5.13), le terme $\mathcal{W}_{\alpha,0}^{\text{cd}}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire d'ordre 2 en Y_3

$$\begin{cases} \partial_3^2 \mathcal{W}_{\alpha,0}^{\text{cd}}(\cdot, Y_3) + i\kappa^2 \mathcal{W}_{\alpha,0}^{\text{cd}}(\cdot, Y_3) = 0 & \text{si } Y_3 \in I = (0, \infty) \\ \partial_3 \mathcal{W}_{\alpha,0}^{\text{cd}}(\cdot, 0) = 0 \end{cases} \quad (5.18)$$

La condition aux limites dans le système d'équations (5.18) et l'hypothèse (5.11) assure l'unicité de la solution de l'équation différentielle ordinaire (noté par les abréviations EDO dans la suite). Donc, $\mathcal{W}_{\alpha,0}^{\text{cd}} = 0$ dans Ω_0 . Par suite, $\mathbf{W}_0^{\text{cd}} = 0$ dans Ω_0 et $\mathbf{E}_0^{\text{cd}} = 0$ dans Ω_{cd} .

Terme d'ordre 0 dans le domaine isolant Ω_{is}

Comme $\mathbf{E}_0^{\text{cd}} = 0$ dans Ω_{cd} , le terme \mathbf{E}_0^{is} vérifie la condition aux limites suivante

$$\mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \quad (5.19)$$

C'est la condition du *conducteur parfait* pour le champ électrique sur Σ . D'après la relation (5.16), le problème à résoudre pour le terme \mathbf{E}_0^{is} est donc le suivant

Trouver $\mathbf{E}_0^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$ tel que pour tout $\mathbf{E}' \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$

$$\int_{\Omega_{\text{is}}} \frac{1}{\mu} (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \mathbf{E}_0^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{E}}') \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{\text{is}}} \mathbf{F}^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{E}}' \, d\mathbf{x}. \quad (5.20)$$

Or, d'après l'hypothèse spectrale 2.24, κ^2 n'est pas valeur propre du problème

Trouver $\mathbf{E}_0 \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$ tel que pour tout $\mathbf{E}' \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$

$$\int_{\Omega_{\text{is}}} (\text{rot } \mathbf{E}_0 \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \mathbf{E}_0 \cdot \bar{\mathbf{E}}') \, d\mathbf{x} = 0. \quad (5.21)$$

Donc, l'opérateur sous-jacent au problème (5.21) est inversible. Par suite, l'équation (5.20) admet une unique solution $\mathbf{E}_0^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$. De plus, par régularité elliptique, $\mathbf{E}_0^{\text{is}} \in \mathbf{H}^s(\Omega_{\text{is}})$ car $\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s-2}(\Omega)$.

5.3.2 Termes d'ordre 1

Terme d'ordre 1 dans le domaine conducteur Ω_{cd}

D'après la seconde équation du système (5.14), il vient $w_1^{\text{cd}} = 0$ dans Ω_0 . De plus, d'après les secondes équations des systèmes (5.12) et (5.13), le terme $\mathcal{W}_{\alpha,1}^{\text{cd}}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire en Y_3 suivante

$$\begin{cases} \partial_3^2 \mathcal{W}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(\cdot, Y_3) + i\kappa^2 \mathcal{W}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(\cdot, Y_3) = 0 & \text{si } Y_3 \in I \\ \partial_3 \mathcal{W}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(\cdot, 0) = (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\alpha(\cdot, 0) \end{cases} \quad (5.22)$$

car \mathbf{W}_0^{cd} est identiquement nul. Dans la suite, on définit le nombre complexe λ par la relation

$$\lambda = \kappa e^{-i\pi/4} \quad (5.23)$$

de sorte que $\text{Re } \lambda > 0$ et $\lambda^2 = -i\kappa^2$. Le résultat suivant donne une expression du terme $\mathcal{W}_{\alpha,1}^{\text{cd}}$.

Proposition 5.3 *Sous l'hypothèse (5.11), l'EDO (5.22) admet une unique solution $\mathcal{W}_{\alpha,1}^{\text{cd}}$. De plus, pour tout $(y_\beta, Y_3) \in \Omega_0$, on a*

$$\mathcal{W}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = -\frac{1}{\lambda} (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\alpha(y_\beta, 0) e^{-\lambda Y_3}. \quad (5.24)$$

D'après la seconde équation dans (5.14), il vient $w_1^{\text{cd}} = 0$ dans Ω_0 . On en déduit l'expression du terme \mathbf{W}_1^{cd} .

Proposition 5.4 *Pour tout $(y_\beta, Y_3) \in \Omega_0$, on a*

$$\mathbf{W}_1^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = -\frac{1}{\lambda} (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})(y_\beta, 0) e^{-\lambda Y_3}. \quad (5.25)$$

Terme d'ordre 1 dans le domaine isolant Ω_{is}

Le terme \mathbf{E}_1^{cd} est bien défini dans \mathcal{O} par l'identité (5.10) pour $j = 1$. En particulier, d'après la relation (5.25), il vient

$$\mathbf{E}_1^{cd} \times \mathbf{n} = -\frac{1}{\lambda} (\text{rot } \mathbf{E}_0^{is} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma.$$

Ainsi, le terme \mathbf{E}_1^{is} vérifie la condition aux limites suivante

$$\mathbf{E}_1^{is} \times \mathbf{n} = -\frac{1}{\lambda} (\text{rot } \mathbf{E}_0^{is} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (5.26)$$

De plus, $\mathbf{E}_1^{cd} \times \mathbf{n}|_{\Sigma} \in \mathbf{H}^{s-\frac{3}{2}}(\Sigma)$. D'après la relation (5.17), le problème à résoudre pour le terme \mathbf{E}_1^{is} est le suivant

Trouver $\mathbf{E}_1^{is} \in \mathbf{X}_T^{\partial\Omega}(\Omega_{is})$, avec $\mathbf{E}_1^{is} - \Phi_{\Sigma}^{is}(\mathbf{E}_1^{cd} \times \mathbf{n}) \in \mathbf{X}_{TN}(\Omega_{is})$, tel que

$$\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{X}_{TN}(\Omega_{is}), \int_{\Omega_{is}} (\text{rot } \mathbf{E}_1^{is} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \mathbf{E}_1^{is} \cdot \bar{\mathbf{E}}') \, d\mathbf{x} = 0, \quad (5.27)$$

où l'opérateur Φ_{Σ}^{is} est défini au paragraphe 5.2.5. D'après l'hypothèse spectrale 2.24, l'équation (5.27) admet une unique solution $\mathbf{E}_1^{is} \in \mathbf{X}_T^{\partial\Omega}(\Omega_{is})$. De plus, par régularité elliptique, $\mathbf{E}_1^{is} \in \mathbf{H}^{s-1}(\Omega_{is})$.

5.3.3 Termes d'ordre 2

Terme d'ordre 2 dans le domaine conducteur Ω_{cd}

D'après la troisième équation du système (5.14), il vient

$$w_2^{cd} = -i\kappa^{-2} \gamma_{\alpha}^{\alpha} (\partial_3 (\mathbf{W}_1^{cd})) \quad \text{dans } \Omega_0$$

car $w_1^{cd} = 0$ et $\mathbf{W}_0^{cd} = 0$ dans Ω_0 . Ainsi, d'après l'identité (5.24), il vient

$$w_2^{cd}(y_{\beta}, Y_3) = -i\kappa^{-2} \gamma_{\alpha}^{\alpha} (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{is} \times \mathbf{n})(y_{\beta}, 0) e^{-\lambda Y_3} \quad \text{dans } \Omega_0.$$

D'après les systèmes d'équations (5.12) et (5.13), le terme $\mathcal{W}_{\alpha,2}^{cd}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire en Y_3 suivante

$$\begin{cases} \partial_3^2 \mathcal{W}_{\alpha,2}^{cd}(\cdot, Y_3) + i\kappa^2 \mathcal{W}_{\alpha,2}^{cd}(\cdot, Y_3) = -2b_{\alpha}^{\sigma} \partial_3 \mathcal{W}_{\sigma,1}^{cd}(\cdot, Y_3) + b_{\beta}^{\beta} \partial_3 \mathcal{W}_{\alpha,1}^{cd}(\cdot, Y_3) & \text{si } Y_3 \in I \\ \partial_3 \mathcal{W}_{\alpha,2}^{cd}(\cdot, 0) = (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_1^{is} \times \mathbf{n})_{\alpha}(\cdot, 0) \end{cases} \quad (5.28)$$

car $w_1^{cd} = 0$ dans Ω_0 . Le résultat suivant donne l'expression du terme $\mathcal{W}_{\alpha,2}^{cd}$.

Proposition 5.5 *Sous l'hypothèse (5.11), l'EDO (5.28) admet une unique solution $\mathcal{W}_{\alpha,2}^{\text{cd}}$. De plus, pour tout $(y_\beta, Y_3) \in \Omega_0$ on a*

$$\mathcal{W}_{\alpha,2}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = [a_{\alpha,2}^0(y_\beta) + Y_3 a_{\alpha,2}^1(y_\beta)] e^{-\lambda Y_3} \quad (5.29)$$

avec

$$\begin{cases} a_{\alpha,2}^0(y_\beta) = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{\lambda} \{ b_\alpha^\sigma (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma - \frac{1}{2} b_\sigma^\sigma (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\alpha \} - (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_1^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\alpha \right] (y_\beta, 0) \\ a_{\alpha,2}^1(y_\beta) = \frac{1}{\lambda} [b_\alpha^\sigma (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma - \frac{1}{2} b_\sigma^\sigma (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\alpha] (y_\beta, 0) \end{cases} \quad (5.30)$$

Remarque 5.6 *Les termes $a_{\alpha,2}^0$ et $a_{\alpha,2}^1$ de l'identité (5.29) dépendent du tenseur de courbure $b_{\alpha\beta}$ de la variété Σ .*

PREUVE. On calcule le second membre de l'équation (5.28). D'après l'identité (5.24), il vient

$$-2b_\alpha^\sigma \partial_3 \mathcal{W}_{\sigma,1}^{\text{cd}} + b_\beta^\beta \partial_3 \mathcal{W}_{\alpha,1}^{\text{cd}} = [-2b_\alpha^\sigma (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma + b_\sigma^\sigma (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\alpha] e^{-\lambda Y_3} \quad (5.31)$$

Le terme général de l'ensemble des solutions de (5.28) vérifiant l'hypothèse (5.11) a la structure suivante

$$\mathcal{W}_{\alpha,2}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = [a_{\alpha,2}^0(y_\beta) + Y_3 a_{\alpha,2}^1(y_\beta)] e^{-\lambda Y_3}.$$

Analysons l'ensemble de ces solutions. On a successivement

$$\partial_3 \mathcal{W}_{\alpha,2}^{\text{cd}} = [-\lambda(a_{\alpha,2}^0 + Y_3 a_{\alpha,2}^1) + a_{\alpha,2}^1] e^{-\lambda Y_3}$$

puis,

$$\partial_3^2 \mathcal{W}_{\alpha,2}^{\text{cd}} = [\lambda^2(a_{\alpha,2}^0 + Y_3 a_{\alpha,2}^1) - 2\lambda a_{\alpha,2}^1] e^{-\lambda Y_3}.$$

Donc,

$$\partial_3^2 \mathcal{W}_{\alpha,2}^{\text{cd}} - \lambda^2 \mathcal{W}_{\alpha,2}^{\text{cd}} = -2\lambda a_{\alpha,2}^1 e^{-\lambda Y_3}$$

et

$$\partial_3 \mathcal{W}_{\alpha,2}^{\text{cd}}(y_\beta, 0) = -\lambda a_{\alpha,2}^0(y_\beta) + a_{\alpha,2}^1(y_\beta).$$

Ainsi, si $\mathcal{W}_{\alpha,2}^{\text{cd}}$ est solution de l'EDO (5.28), alors d'après (5.31), il vient

$$\begin{cases} -2\lambda a_{\alpha,2}^1(y_\beta) &= [-2b_\alpha^\sigma (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma + b_\sigma^\sigma (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\alpha] (y_\beta, Y_3) \\ -\lambda a_{\alpha,2}^0(y_\beta) + a_{\alpha,2}^1(y_\beta) &= (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_1^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\alpha (y_\beta, 0). \end{cases} \quad (5.32)$$

On en déduit les relations (5.30). ■

Terme d'ordre 2 dans le domaine isolant Ω_{is}

Le terme \mathbf{E}_2^{cd} est bien défini dans \mathcal{O} par l'identité (5.10) pour $j = 2$. En particulier, d'après la relation (5.29), il vient

$$\mathbf{E}_2^{cd} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{\lambda} \{ b_\alpha^\sigma (\text{rot } \mathbf{E}_0^{is} \times \mathbf{n})_\sigma dy^\alpha - \frac{1}{2} b_\sigma^\sigma (\text{rot } \mathbf{E}_0^{is} \times \mathbf{n}) \} - (\text{rot } \mathbf{E}_1^{is} \times \mathbf{n}) \right] \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma.$$

Ainsi, le terme \mathbf{E}_2^{is} vérifie la condition aux limites suivante

$$\mathbf{E}_2^{is} \times \mathbf{n} = \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{\lambda} \{ b_\alpha^\sigma (\text{rot } \mathbf{E}_0^{is} \times \mathbf{n})_\sigma dy^\alpha - \frac{1}{2} b_\sigma^\sigma (\text{rot } \mathbf{E}_0^{is} \times \mathbf{n}) \} - (\text{rot } \mathbf{E}_1^{is} \times \mathbf{n}) \right] \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (5.33)$$

De plus, $\mathbf{E}_2^{cd} \times \mathbf{n}|_\Sigma \in \mathbf{H}^{s-\frac{5}{2}}(\Sigma)$. D'après la relation (5.17) pour $j = 2$, le problème à résoudre pour le terme \mathbf{E}_2^{is} est le suivant

Trouver $\mathbf{E}_2^{is} \in \mathbf{X}_T^{\partial\Omega}(\Omega_{is})$, avec $\mathbf{E}_2^{is} - \Phi_\Sigma^{is}(\mathbf{E}_2^{cd} \times \mathbf{n}) \in \mathbf{X}_{TN}(\Omega_{is})$, tel que

$$\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{X}_{TN}(\Omega_{is}), \int_{\Omega_{is}} (\text{rot } \mathbf{E}_2^{is} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \mathbf{E}_2^{is} \cdot \bar{\mathbf{E}}') d\mathbf{x} = 0 \quad (5.34)$$

D'après l'hypothèse spectrale 2.24, le problème variationnel (5.34) admet une unique solution $\mathbf{E}_2^{is} \in \mathbf{X}_T^{\partial\Omega}(\Omega_{is})$. De plus, par régularité elliptique, on a $\mathbf{E}_2^{is} \in \mathbf{H}^{s-2}(\Omega_{is})$.

5.3.4 Termes d'ordre supérieur

Composante surfacique du terme d'ordre 3 dans le domaine conducteur Ω_{cd}

D'après les systèmes d'équations (5.12) et (5.13), le terme $\mathcal{W}_{\alpha,3}^{cd}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire en Y_3 suivante

$$\begin{cases} \partial_3^2 \mathcal{W}_{\alpha,3}^{cd}(\cdot, Y_3) + i\kappa^2 \mathcal{W}_{\alpha,3}^{cd}(\cdot, Y_3) = L_\alpha^1 \mathbf{W}_2^{cd} + R_\alpha^2 \mathbf{W}_1^{cd} & \text{si } Y_3 \in I \\ \partial_3 \mathcal{W}_{\alpha,3}^{cd}(\cdot, 0) = \partial_\alpha w_2^{cd} + (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_2^{is} \times \mathbf{n})_\alpha(\cdot, 0) \end{cases} \quad (5.35)$$

Le résultat suivant donne l'expression du terme $\mathcal{W}_{\alpha,3}^{cd}$.

Proposition 5.7 *Sous l'hypothèse (5.11), l'EDO (5.35) admet une unique solution $\mathcal{W}_{\alpha,3}^{cd}$. De plus, pour tout $(y_\beta, Y_3) \in \Omega_0$ on a*

$$\mathcal{W}_{\alpha,3}^{cd}(y_\beta, Y_3) = [a_{\alpha,3}^0(y_\beta) + Y_3 a_{\alpha,3}^1(y_\beta) + Y_3^2 a_{\alpha,3}^2(y_\beta)] e^{-\lambda Y_3} \quad (5.36)$$

où les fonctions $a_{\alpha,3}^j$ sont définies successivement par les relations suivantes

$$\begin{cases} a_{\alpha,3}^2 &= \frac{1}{4\lambda} [2b_\alpha^\beta a_{\beta,2}^1 - \lambda b_\beta^\beta a_{\alpha,2}^1 - 2\lambda (b^2)_\alpha^\beta a_{\beta,1}^0] \\ a_{\alpha,3}^1 &= \frac{1}{2\lambda} [a_{\alpha,3}^2 + 2b_\alpha^\beta (a_{\beta,2}^1 - \lambda a_{\beta,2}^0) + b_\beta^\beta (a_{\alpha,2}^1 - \lambda a_{\alpha,2}^0) + \partial_\alpha \gamma_\beta^\beta (a_{\sigma,1}^0 dy^\sigma) \\ &\quad + 2\{ (b^2)_\alpha^\beta a_{\beta,1}^0 + D_\beta \gamma_\alpha^\beta (a_{\sigma,1}^0 dy^\sigma) - D_\alpha \gamma_\beta^\beta (a_{\sigma,1}^0 dy^\sigma) \}] \\ a_{\alpha,3}^0 &= \frac{1}{\lambda} [a_{\alpha,3}^1 - \frac{1}{\lambda} D_\alpha \gamma_\beta^\beta (a_{\sigma,1}^0 dy^\sigma) - (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_2^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\alpha] \end{cases} \quad (5.37)$$

où

$$a_{\sigma,1}^0 dy^\sigma = -\frac{1}{\lambda} \text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n}$$

et les fonctions $a_{\alpha,2}^j$ sont définies par les relations (5.30).

PREUVE. On calcule le second membre de l'équation (5.35). On a

$$L_\alpha^1 \mathbf{W}_2^{\text{cd}} = -2b_\alpha^\sigma \partial_3 \mathcal{W}_{\sigma,2}^{\text{cd}}(\cdot, Y_3) + \partial_3 \partial_\alpha w_2^{\text{cd}} + b_\beta^\beta \partial_3 \mathcal{W}_{\alpha,2}^{\text{cd}}(\cdot, Y_3) \quad (5.38)$$

et d'après (4.75) et (4.46), on a

$$R_\alpha^2 \mathbf{W}_1^{\text{cd}} = -2[\partial_3 (Y_3 (b^2)_\alpha^\beta \mathcal{W}_{\beta,1}^{\text{cd}})] + 2[D_\alpha \gamma_\beta^\beta (\mathbf{W}_1^{\text{cd}}) - D_\beta \gamma_\alpha^\beta (\mathbf{W}_1^{\text{cd}})] . \quad (5.39)$$

Le terme général de l'ensemble des solutions de (5.35) vérifiant l'hypothèse (5.11) a la structure suivante

$$\mathcal{W}_{\alpha,3}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = [a_{\alpha,3}^0(y_\beta) + Y_3 a_{\alpha,3}^1(y_\beta) + Y_3^2 a_{\alpha,3}^2(y_\beta)] e^{-\lambda Y_3}$$

de sorte qu'on a

$$\partial_3^2 \mathcal{W}_{\alpha,3}^{\text{cd}} - \lambda^2 \mathcal{W}_{\alpha,3}^{\text{cd}} = [(a_{\alpha,3}^2 - 2\lambda a_{\alpha,3}^1) - 4\lambda Y_3 a_{\alpha,3}^2] e^{-\lambda Y_3}$$

et

$$\partial_3 \mathcal{W}_{\alpha,3}^{\text{cd}}(y_\beta, 0) = (a_{\alpha,3}^1 - \lambda a_{\alpha,3}^0)(y_\beta, 0) .$$

Or

$$\mathcal{W}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = a_{\alpha,1}^0(y_\beta) e^{-\lambda Y_3}$$

et

$$\mathcal{W}_{\alpha,2}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = [a_{\alpha,2}^0(y_\beta) + Y_3 a_{\alpha,2}^1(y_\beta)] e^{-\lambda Y_3} .$$

Ainsi, si $\mathcal{W}_{\alpha,3}^{\text{cd}}$ est solution de l'EDO (5.35), alors d'après les relations (5.38) et (5.39), on en déduit successivement les coefficients $a_{\alpha,3}^2$, $a_{\alpha,3}^1$ et $a_{\alpha,3}^0$, voir (5.37). ■

Terme d'ordre $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$ dans le domaine conducteur Ω_{cd}

D'après la série d'équations (5.14), et puisque $\mathbf{W}_0^{\text{cd}} = 0$, pour tout $j \geq 3$ il vient

$$w_j^{\text{cd}} = -i\kappa^{-2} \sum_{k=1}^{j-1} L_3^{j-k}(\mathbf{W}_k^{\text{cd}}) \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (5.40)$$

Remarque 5.8 Les opérateurs L_3^{j-k} dans la relation (5.40) sont composés de dérivées tangentielles et normales d'ordres au plus 2. En particulier, le terme w_j^{cd} consomme une dérivée tangentielle d'ordre 1 de $\mathbf{W}_{j-1}^{\text{cd}}$ car d'après les relations (4.32) et (4.69), on a

$$L_3^1(\mathbf{W}_{j-1}^{\text{cd}}) = \gamma_\alpha^\alpha (\partial_3 \mathbf{W}_{j-1}^{\text{cd}}) + b_\alpha^\alpha \partial_3 w_{j-1}^{\text{cd}} \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (5.41)$$

D'après les séries d'équations (5.12) et (5.13), le terme $\mathcal{W}_{\alpha,j}^{\text{cd}}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire en Y_3 suivante

$$\begin{cases} \partial_3^2 \mathcal{W}_{\alpha,j}^{\text{cd}}(., Y_3) + i\kappa^2 \mathcal{W}_{\alpha,j}^{\text{cd}}(., Y_3) = \sum_{k=0}^{j-1} L_\alpha^{j-k}(\mathbf{W}_k^{\text{cd}})(., Y_3) & \text{pour } Y_3 \in I \\ \partial_3 \mathcal{W}_{\alpha,j}^{\text{cd}}(., 0) = \partial_\alpha w_{j-1}^{\text{cd}}(., 0) + (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_{j-1}^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\alpha(., 0) \end{cases} \quad (5.42)$$

Remarque 5.9 D'après la relation (4.76), on a

$$L_\alpha^1(\mathbf{W}_{j-1}^{\text{cd}}) = -2b_\alpha^\beta \partial_3 \mathcal{W}_{\beta,j-1}^{\text{cd}} + \partial_3 \partial_\alpha w_{j-1}^{\text{cd}} + b_\beta^\beta \partial_3 \mathcal{W}_{\alpha,j-1}^{\text{cd}}. \quad (5.43)$$

En particulier, d'après la condition aux limites de l'EDO (5.42), le terme $\mathcal{W}_j^{\text{cd}}$ consomme une dérivée tangentielle d'ordre 1 du terme $\tilde{\mathbf{E}}_{j-1}^{\text{is}}|_\Sigma$ ainsi que des dérivées tangentielles d'ordres 1 du terme w_{j-1}^{cd} .

On a le résultat suivant.

Proposition 5.10 Soit $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1, 2\}$. Sous l'hypothèse (5.11), l'EDO (5.42) admet une unique solution $\mathcal{W}_{\alpha,j}^{\text{cd}}$. De plus, $\mathcal{W}_{\alpha,j}^{\text{cd}}$ consomme une dérivée tangentielle d'ordre 1 du terme $\tilde{\mathbf{E}}_{j-1}^{\text{is}}|_\Sigma$. Enfin, il existe des fonctions $a_{\alpha,j}^k$ définies sur Σ pour tout $k \leq j-1$, telles que pour tout $(y_\beta, Y_3) \in \Omega_0$, on a

$$\mathcal{W}_{\alpha,j}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = [a_{\alpha,j}^0(y_\beta) + Y_3 a_{\alpha,j}^1(y_\beta) + \cdots + Y_3^{j-1} a_{\alpha,j}^{j-1}(y_\beta)] e^{-\lambda Y_3}. \quad (5.44)$$

Remarque 5.11 Pour tout $k = 1, \dots, j-1$, les fonctions $a_{\alpha,j}^k$ dans l'identité (5.44) sont des combinaisons linéaires de dérivées tangentielles d'ordres au plus 2 des termes $\tilde{\mathbf{E}}_l^{\text{is}}|_\Sigma$ pour $0 \leq l \leq j-2$, et la fonction $a_{\alpha,j}^0$ est une combinaison linéaire de telles dérivées tangentielles avec une dérivée tangentielle d'ordre 1 du terme $\tilde{\mathbf{E}}_{j-1}^{\text{is}}|_\Sigma$. De plus, les coefficients de ces combinaisons dépendent uniquement de la géométrie de Σ .

PREUVE. D'après la relation (5.24), le terme $\mathcal{W}_{\alpha,1}^{\text{cd}}$ consomme une dérivée tangentielle d'ordre 1 du terme $\mathbf{E}_0^{\text{is}}|_{\Sigma}$. De façon plus générale, d'après les remarques 5.8 et 5.9, le terme $\mathcal{W}_j^{\text{cd}}$ consomme une dérivée tangentielle d'ordre 1 du terme $\mathbf{E}_{j-1}^{\text{is}}|_{\Sigma}$. La relation (5.44) se démontre par récurrence sur j . On suppose que pour tout $k \leq j-1$, les termes \mathbf{W}_k^{cd} sont définis et se décomposent sous la forme (5.44). Alors, le second membre de l'équation (5.42) a la structure suivante

$$\sum_{k=0}^{j-1} L_{\alpha}^{j-k}(\mathbf{W}_k^{\text{cd}})(y_{\beta}, Y_3) = [b_{\alpha,j-1}^0(y_{\beta}) + Y_3 b_{\alpha,j-1}^1(y_{\beta}) + \cdots + Y_3^{j-2} b_{\alpha,j-1}^{j-2}(y_{\beta})] e^{-\lambda Y_3} \quad (5.45)$$

où les fonctions $b_{\alpha,j-1}^k(y_{\beta})$ sont des combinaisons linéaires de dérivées tangentielles d'ordres au plus 2 des termes $\tilde{\mathbf{E}}_l^{\text{is}}(y_{\beta}, 0)$ du développement pour $l \leq j-1$ à coefficients dépendant uniquement de la géométrie de l'interface Σ . Ainsi, sous l'hypothèse 5.11, l'EDO (5.42) admet une unique solution et a la structure du type (5.44). Enfin, les fonctions $a_{\alpha,j}^k(y_{\beta})$ sont solutions d'un système linéaire bien posé, voir par exemple le système (5.32) pour $j = 2$. ■

D'après la relation (5.40), on en déduit le résultat suivant.

Proposition 5.12 *Pour tout $j \geq 3$ et pour tout $k \leq j-2$, il existe des fonctions c_j^k telles que pour tout $(y_{\beta}, Y_3) \in \Omega_0$, on a*

$$w_j^{\text{cd}}(y_{\beta}, Y_3) = [c_j^0(y_{\beta}) + Y_3 c_j^1(y_{\beta}) + \cdots + Y_3^{j-2} c_j^{j-2}(y_{\beta})] e^{-\lambda Y_3}. \quad (5.46)$$

Remarque 5.13 *Les fonctions $c_j^k(y_{\beta})$ sont des combinaisons linéaires de dérivées tangentielles d'ordres au plus 2 des termes $\tilde{\mathbf{E}}_l^{\text{is}}(y_{\beta}, 0)$ pour $l \leq j-2$ à coefficients dépendant uniquement de la géométrie de Σ .*

Termes d'ordre $j \geq 3$ dans le domaine isolant Ω_{is}

Le terme \mathbf{E}_j^{cd} est bien défini dans \mathcal{O} par l'identité (5.10). En particulier, d'après la relation (5.44), il vient

$$\mathbf{E}_j^{\text{cd}} \times \mathbf{n} = a_{\alpha,j}^0 dy^{\alpha} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma.$$

Ainsi, le terme \mathbf{E}_j^{is} vérifie la condition aux limites suivante

$$\mathbf{E}_j^{\text{is}} \times \mathbf{n} = a_{\alpha,j}^0 dy^{\alpha} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (5.47)$$

De plus, $\mathbf{E}_j^{\text{cd}} \times \mathbf{n}|_{\Sigma} \in \mathbf{H}^{s-j-\frac{1}{2}}(\Sigma)$. D'après la relation (5.17), le problème à résoudre pour le terme \mathbf{E}_j^{is} est le suivant

Trouver $\mathbf{E}_j^{\text{is}} \in \mathbf{X}_T^{\partial\Omega}(\Omega_{\text{is}})$, avec $\mathbf{E}_j^{\text{is}} - \Phi_\Sigma^{\text{is}}(\mathbf{E}_j^{\text{cd}} \times \mathbf{n}) \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$, tel que

$$\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}}), \int_{\Omega_{\text{is}}} (\text{rot } \mathbf{E}_j^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \mathbf{E}_j^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{E}}') \, d\mathbf{x} = 0 \quad (5.48)$$

où on rappelle que le terme $\Phi_\Sigma^{\text{is}}(\mathbf{E}_j^{\text{cd}} \times \mathbf{n})$ est un relèvement de la trace $\mathbf{E}_j^{\text{cd}} \times \mathbf{n}|_\Sigma$ dans le domaine Ω_{is} . D'après l'hypothèse spectrale 2.24, l'équation (5.48) admet une unique solution $\mathbf{E}_j^{\text{is}} \in \mathbf{X}_T^{\partial\Omega}(\Omega_{\text{is}})$. De plus, par régularité elliptique, on a $\mathbf{E}_j^{\text{is}} \in \mathbf{H}^{s-j}(\Omega_{\text{is}})$

On a mis en évidence dans ce paragraphe un processus de construction des différents termes du développement asymptotique du champ électrique dans les domaines Ω_{is} et Ω_{cd} . On synthétise ces résultats dans la sous-section suivante.

5.3.5 Synthèse du développement asymptotique

Le procédé de construction décrit dans le paragraphe précédent peut être poursuivi à tout ordre, pourvu que la donnée \mathbf{F} soit suffisamment régulière. Pour une donnée $\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s-2}(\Omega_{\text{is}})$, où $s \geq 2$, le terme $\mathbf{E}_0^{\text{is}} \in \mathbf{H}^s(\Omega_{\text{is}})$ est défini par l'équation (5.20) et satisfait les équations aux dérivées partielles (EDP) suivantes au sens des distributions

$$\begin{cases} \text{rot rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{E}_0^{\text{is}} = \mu \mathbf{F}^{\text{is}} & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Sous l'hypothèse spectrale 2.24, on peut définir un opérateur continu \mathcal{R}^{is} par

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}^{\text{is}} : \mathbf{H}^{\frac{3}{2}}(\Sigma) & \rightarrow & \{\mathbf{E}^{\text{is}} \in \mathbf{H}^2(\Omega_{\text{is}}) \mid \text{div } \mathbf{E}^{\text{is}} = 0\} \\ \mathbf{G} & \mapsto & \mathbf{E}^{\text{is}} \end{array}$$

où \mathbf{E}^{is} est l'unique solution au sens des distributions des EDP suivantes

$$\begin{cases} \text{rot rot } \mathbf{E}^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{E}^{\text{is}} = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \mathbf{E}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = \mathbf{G} & \text{sur } \Sigma \\ \text{rot } \mathbf{E}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Pour tout réel $t \geq 2$, cet opérateur \mathcal{R}^{is} est aussi continu des espaces

$$\mathbf{H}^{t-\frac{1}{2}}(\Sigma) \rightarrow \{\mathbf{E}^{\text{is}} \in \mathbf{H}^t(\Omega_{\text{is}}) \mid \text{div } \mathbf{E}^{\text{is}} = 0\}$$

Proposition 5.14 Soient $s \geq 2$ et $\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s-2}(\Omega)$ à support dans Ω_{is} tel que $\text{div } \mathbf{F} = 0$ dans Ω . L'interface Σ est une surface de classe C^∞ . Sous l'hypothèse spectrale 2.24, pour tout $j = 0, \dots, \lfloor s \rfloor - 2$, on peut construire successivement les termes indépendants de δ

$$\mathbf{W}_j^{\text{cd}} \in \mathbf{H}^{s-j-\frac{1}{2}}(\Sigma, \mathcal{C}^\infty(I)) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_j^{\text{is}} \in \mathbf{H}^{s-j}(\Omega_{\text{is}}).$$

Le terme $\mathbf{W}_0^{\text{cd}} = 0$ et \mathbf{E}_0^{is} est défini par l'équation (5.20). Pour tout $j = 1, \dots, \lfloor s \rfloor - 2$, il existe un opérateur tangentiel \mathfrak{T}_j d'ordre j défini par

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_j : \mathbf{H}^s(\Omega_{\text{is}}) &\rightarrow \mathbf{H}^{s-j-\frac{1}{2}}(\Sigma) \\ \mathbf{E}_0^{\text{is}} &\mapsto \mathbf{E}_j^{\text{is}} \times \mathbf{n}|_\Sigma \end{aligned}$$

tel que

$$\mathbf{E}_j^{\text{is}} = \mathcal{R}^{\text{is}} \circ \mathfrak{T}_j(\mathbf{E}_0^{\text{is}}). \quad (5.49)$$

En particulier, on a explicitement

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_1(\mathbf{E}_0^{\text{is}}) &= -\frac{1}{\lambda}(\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n} \\ \mathfrak{T}_2(\mathbf{E}_0^{\text{is}}) &= \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{\lambda} \{ b_\alpha^\sigma (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma dy^\alpha - \frac{1}{2} b_\sigma^\sigma \text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n} \} - \text{rot } \mathcal{R}^{\text{is}} \circ \mathfrak{T}_1(\mathbf{E}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n} \right] \times \mathbf{n} \end{aligned} \quad (5.50)$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_1^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) &= -\frac{1}{\lambda}(\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})(y_\beta, 0) e^{-\lambda Y_3} \\ \mathbf{W}_2^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) &= \left([a_{\alpha,2}^0(y_\beta) + Y_3 a_{\alpha,2}^1(y_\beta)] dy^\alpha - i\kappa^{-2} \gamma_\alpha^\alpha (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})(y_\beta, 0) \mathbf{n} \right) e^{-\lambda Y_3} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} a_{\alpha,2}^0(y_\beta) &= \frac{1}{\lambda} \left[\frac{1}{\lambda} \{ b_\alpha^\sigma (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma - \frac{1}{2} b_\sigma^\sigma (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\alpha \} - (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_1^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\alpha \right] (y_\beta, 0) \\ a_{\alpha,2}^1(y_\beta) &= \frac{1}{\lambda} \left[b_\alpha^\sigma (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma - \frac{1}{2} b_\sigma^\sigma (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\alpha \right] (y_\beta, 0) \end{aligned}$$

et pour tout $j \geq 3$,

$$\mathbf{W}_j^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = \mathcal{W}_{\alpha,j}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) dy^\alpha + w_j^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) \mathbf{n}$$

où $\mathcal{W}_{\alpha,j}^{\text{cd}}$ est défini par l'EDO (5.42) et w_j^{cd} par la relation (5.40). La solution \mathbf{E}_δ du problème (5.1) admet alors le développement asymptotique suivant

$$\mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \simeq \mathbf{E}_0^{\text{is}} + \delta \mathbf{E}_1^{\text{is}} + \delta^2 \mathbf{E}_2^{\text{is}} + \dots \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}}$$

et

$$\mathbf{E}_\delta^{\text{cd}}(\mathbf{x}) \simeq \delta \mathbf{W}_1^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{h}{\delta}) + \delta^2 \mathbf{W}_2^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{h}{\delta}) + \dots \quad \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O}.$$

PREUVE. On démontre par récurrence sur j qu'on peut définir un opérateur tangentiel \mathfrak{T}_j d'ordre j défini pour tout $j = 1, \dots, \lfloor s \rfloor - 2$ par

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_j : \mathbf{H}^s(\Omega_{\text{is}}) &\rightarrow \mathbf{H}^{s-j-\frac{1}{2}}(\Sigma) \\ \mathbf{E}_0^{\text{is}} &\mapsto \mathbf{E}_j^{\text{is}} \times \mathbf{n}|_{\Sigma} \end{aligned}$$

de sorte que pour tout $j = 1, \dots, \lfloor s \rfloor - 2$, le terme $\mathbf{E}_j^{\text{is}} \in \mathbf{H}^{s-j}(\Omega_{\text{is}})$ satisfait

$$\mathbf{E}_j^{\text{is}} = \mathcal{R}^{\text{is}} \circ \mathfrak{T}_j(\mathbf{E}_0^{\text{is}}). \quad (5.51)$$

Soit $j \in \llbracket 1, \lfloor s \rfloor - 2 \rrbracket$. On suppose que pour tout $l \leq j$, il existe un opérateur \mathfrak{T}_l d'ordre l défini par

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_l : \mathbf{H}^s(\Omega_{\text{is}}) &\rightarrow \mathbf{H}^{s-l-\frac{1}{2}}(\Sigma) \\ \mathbf{E}_0^{\text{is}} &\mapsto \mathbf{E}_l^{\text{is}} \times \mathbf{n}|_{\Sigma} \end{aligned}$$

de sorte que le terme $\mathbf{E}_l^{\text{is}} \in \mathbf{H}^{s-l}(\Omega_{\text{is}})$ satisfait

$$\mathbf{E}_l^{\text{is}} = \mathcal{R}^{\text{is}} \circ \mathfrak{T}_l(\mathbf{E}_0^{\text{is}}). \quad (5.52)$$

D'après la condition de transmission (5.47), on a

$$\mathbf{E}_{j+1}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = a_{\alpha, j+1}^0 dy^\alpha \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \quad (5.53)$$

et d'après la proposition 5.10, le terme $a_{\alpha, j+1}^0$ consomme une dérivée tangentielle d'ordre 1 du terme $\mathbf{E}_j^{\text{is}}|_{\Sigma}$. Donc, il existe un opérateur tangentiel \mathfrak{T}_{j+1} d'ordre $j+1$ défini par

$$\begin{aligned} \mathfrak{T}_{j+1} : \mathbf{H}^s(\Omega_{\text{is}}) &\rightarrow \mathbf{H}^{s-j-\frac{3}{2}}(\Sigma) \\ \mathbf{E}_0^{\text{is}} &\mapsto \mathbf{E}_{j+1}^{\text{is}} \times \mathbf{n}|_{\Sigma} \end{aligned}$$

tel que

$$a_{\alpha, j+1}^0 dy^\alpha \times \mathbf{n} = \mathfrak{T}_{j+1}(\mathbf{E}_0^{\text{is}}) \quad \text{sur } \Sigma.$$

Par suite, d'après la relation (5.53), il vient

$$\mathbf{E}_{j+1}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = \mathfrak{T}_{j+1}(\mathbf{E}_0^{\text{is}}) \quad \text{sur } \Sigma$$

ce qui prouve la relation (5.51) à l'ordre $j+1$. Enfin, les relations (5.50) se déduisent respectivement des identités (5.26) et (5.33). ■

Dans la section suivante, on s'intéresse aux relations de compatibilités que doit vérifier le terme \mathbf{E}_δ .

5.4 Relations de compatibilité

Dans cette dernière partie, on démontre que le champ électrique défini par les séries formelles sous-jacentes au développement asymptotique (5.9) est à divergence nulle dans Ω_0 et satisfait la condition de transmission suivante

$$(1 + \frac{i}{\delta^2})E_3^{\text{cd}} = \mathbf{E}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma.$$

5.4.1 Relations de compatibilité sur la divergence

D'après la relation (4.83), l'équation (5.3) s'écrit

$$\delta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \operatorname{div}^n(\mathbf{W}_{\delta}^{\text{cd}}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\delta}. \quad (5.54)$$

Equations vérifiées par la divergence dans Ω_0

En effectuant le produit de Cauchy des séries formelles associées à l'opérateur $\operatorname{div}[\delta]$, voir (4.31), et à la série $\sum_{j \geq 0} \mathbf{W}_j^{\text{cd}} \delta^j$, il vient

$$\delta^{-1} \left(\sum_{n \geq 0} \delta^n \operatorname{div}^n \right) \left(\sum_{j \geq 0} \delta^j \mathbf{W}_j^{\text{cd}} \right) = \delta^{-1} \sum_{n \geq 0} \delta^n \left[\sum_{l=0}^n \operatorname{div}^{n-l} \mathbf{W}_l^{\text{cd}} \right].$$

On substitue l'Ansatz (5.9) dans la relation (5.54), puis on identifie les termes selon les puissances de δ . Il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{l=0}^n \operatorname{div}^{n-l} \mathbf{W}_l^{\text{cd}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (5.55)$$

En particulier, d'après le système d'équations (4.78), on a les identités suivantes posées dans Ω_0

$$\begin{cases} \partial_3 w_0^{\text{cd}} = 0 \\ \partial_3 w_1^{\text{cd}} + \gamma_{\alpha}^{\alpha}(\mathbf{W}_0^{\text{cd}}) = 0 \\ \partial_3 w_2^{\text{cd}} + \gamma_{\alpha}^{\alpha}(\mathbf{W}_1^{\text{cd}}) + \operatorname{div}^1 \mathbf{W}_0^{\text{cd}} = 0 \end{cases} \quad (5.56)$$

Les deux premières relations de compatibilité dans (5.56) sont triviales car $\mathbf{W}_0^{\text{cd}} = 0$ et $w_1^{\text{cd}} = 0$ dans Ω_0 . On vérifie à présent la troisième. D'après la seconde équation dans (5.14), on a

$$\gamma_{\alpha}^{\alpha}(\partial_3(\mathbf{W}_1^{\text{cd}})) - i\kappa^2 w_2^{\text{cd}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_0.$$

Or, les opérateurs ∂_3 et γ_α^α commutent, donc

$$\partial_3 w_2^{\text{cd}} = -i\kappa^{-2} \gamma_\alpha^\alpha (\partial_3^2 (\mathbf{W}_1^{\text{cd}})) \quad \text{dans } \Omega_0.$$

Ainsi, d'après (5.22), il vient

$$\partial_3 w_2^{\text{cd}} = -i\kappa^{-2} \gamma_\alpha^\alpha (-i\kappa^2 (\mathbf{W}_1^{\text{cd}})) \quad \text{dans } \Omega_0 \quad (5.57)$$

car $w_1^{\text{cd}} = 0$ dans Ω_0 . Par suite,

$$\partial_3 w_2^{\text{cd}} = -\gamma_\alpha^\alpha (\mathbf{W}_1^{\text{cd}}) \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (5.58)$$

On démontre plus généralement dans le paragraphe suivant que les identités (5.55) sont des relations de compatibilité.

Relations de compatibilité sur la divergence

Soit $\mathbf{L}(\delta)$, $\text{div}(\delta)$ et $\mathbf{R}(\delta)$ les séries formelles associées respectivement aux opérateurs $\mathbf{L}[\delta]$, $\text{div}[\delta]$ et $\mathbf{R}[\delta]$. On définit aussi la série formelle $\mathbf{W}_\delta = \sum_{j \geq 0} \delta^j \mathbf{W}_j^{\text{cd}}$, où les termes \mathbf{W}_j^{cd} ont été définis au paragraphe 5.3. Alors, d'après les relations (5.12) et (5.14), il vient

$$\mathbf{L}(\delta) \mathbf{W}_\delta = 0 \quad \text{dans } \Omega_0.$$

En particulier,

$$\text{div}(\delta) \mathbf{L}(\delta) \mathbf{W}_\delta = 0 \quad \text{dans } \Omega_0.$$

Or,

$$\text{div}(\delta) \mathbf{R}(\delta) \mathbf{W}_\delta = 0 \quad \text{dans } \Omega_0$$

car la divergence d'un rotationnel est identiquement nulle. Donc, d'après l'identité (4.79), il vient

$$\text{div}(\delta) \left(\left(1 + \frac{i}{\delta^2} \right) \mathbf{W}_\delta \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega_0.$$

Par suite,

$$\text{div}(\delta) \mathbf{W}_\delta = 0 \quad \text{dans } \Omega_0.$$

On en déduit que les identités (5.55) sont compatibles avec le développement asymptotique.

5.4.2 Relations de compatibilité à l'interface

On définit la série formelle $\mathbf{E}_\delta^{\text{is}} = \sum_{j \geq 0} \delta^j \mathbf{E}_j^{\text{is}}$ dans Ω_{is} et on rappelle que $\mathbf{W}_\delta = \sum_{j \geq 0} \delta^j \mathbf{W}_j^{\text{cd}}$ dans Ω_0 . On définit le terme \mathbf{E}^δ par

$$\begin{cases} \mathbf{E}^\delta = \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \mathbf{E}^\delta = \mathbf{W}_\delta & \text{dans } \Omega_0 \end{cases}$$

Par définition des termes du développement asymptotique, on en déduit les identités suivantes au sens des distributions

$$\frac{1}{\mu} \text{rot rot } \mathbf{E}^\delta - \kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{E}^\delta = \mathbf{F} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}} \cup \Sigma \cup \Omega_0$$

et

$$\text{div } \varepsilon(\delta) \mathbf{E}^\delta = -\frac{1}{\kappa^2} \text{div } \mathbf{F} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}} \cup \Sigma \cup \Omega_0,$$

voir la proposition 2.15. En particulier, on a la relation suivante au sens des distributions

$$[\varepsilon(\delta) \mathbf{E}^\delta \cdot \mathbf{n}]_\Sigma = 0$$

i.e.

$$(1 + \frac{i}{\delta^2}) \mathbf{W}_\delta \cdot \mathbf{n} = \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (5.59)$$

En substituant l'Ansatz (5.9) dans l'identité (5.59) et en identifiant les termes selon les puissances de δ , on en déduit les équations suivantes posées sur Σ

$$\begin{cases} iw_0^{\text{cd}} &= 0 \\ iw_1^{\text{cd}} &= 0 \\ iw_{j+2}^{\text{cd}} + w_j^{\text{cd}} &= \tilde{\mathbf{E}}_j^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} \quad \text{pour } j \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (5.60)$$

Les identités du système (5.60) sont des relations de compatibilité. Autrement dit, les termes du développement asymptotique satisfont les équations du système (5.60). On rappelle que par définition des termes w_0^{cd} et w_1^{cd} , on avait déjà les relations $w_0^{\text{cd}} = 0$ et $w_1^{\text{cd}} = 0$ dans Ω_0 .

Chapitre 6

Développement asymptotique du champ magnétique \mathbf{H}

6.1 Introduction

Dans ce sixième chapitre, on effectue des développements asymptotiques multi-échelles du champ magnétique selon deux approches différentes. D'une part, à partir de la loi de Faraday et du développement asymptotique en champ électrique effectué au chapitre 5, on obtient un premier développement asymptotique du champ magnétique. D'autre part, à partir d'une étude des équations de Maxwell en champ magnétique, similaire à celle en champ électrique effectuée au chapitre 2, on peut aussi calculer directement un développement asymptotique du champ magnétique. On adopte dans ce second cas une démarche similaire à celle du chapitre 5.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Dans la section 6.2, on calcule un développement en δ de l'opérateur rotationnel en paramétrisation normale après changement d'échelle. Au paragraphe 6.3, on calcule un développement asymptotique du champ magnétique à partir de la loi de Faraday et du développement en champ électrique effectué au chapitre 5. Ensuite, dans la section 6.4, on calcule un développement asymptotique en champ magnétique à partir de l'étude similaire en champ électrique effectuée au chapitre 5. Enfin, on compare et on synthétise les résultats obtenus par ces deux approches au paragraphe 6.5.

6.2 Développement de l'opérateur rotationnel

On note \mathbf{C} l'opérateur rotationnel en paramétrisation normale

$$\mathbf{C} : \mathcal{C}^\infty((0, \eta), \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \rightarrow \mathcal{C}^\infty((0, \eta), \Gamma(T^1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \quad (6.1)$$

défini par ses composantes contravariantes surfaciques et transverses,

$$\begin{cases} C^\alpha(\mathbf{E}) = \epsilon^{3\beta\alpha}(\partial_3^h E_\beta - \partial_\beta E_3) \\ C^3(\mathbf{E}) = \epsilon^{\alpha\beta 3} D_\alpha^h E_\beta \end{cases} \quad (6.2)$$

voir la proposition 3.30, où

$$\mathbf{E} \in \mathcal{C}^\infty((0, \eta), \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) .$$

On note aussi \mathbf{A} l'opérateur $\mathbf{n} \times \nabla \times$ associé au champ de 1-forme \mathbf{n}

$$\mathbf{A} : \mathcal{C}^\infty((0, \eta), \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \rightarrow \mathcal{C}^\infty((0, \eta), \Gamma(T_1 \Sigma_0)) \quad (6.3)$$

et défini en paramétrisation normale par ses composantes surfaciques

$$\mathbf{A}(\mathbf{E}) = (\partial_\alpha E_3 - \partial_3^h E_\alpha) dy^\alpha, \quad (6.4)$$

voir la proposition 3.36.

Remarque 6.1 Les opérateurs \mathbf{A} et $-\mathbf{B}$, voir (4.22), coïncident en tant qu'opérateurs agissant sur Σ . On introduit la notation \mathbf{A} pour mettre l'accent sur le rôle que joue cet opérateur dans des calculs tensoriels dans \mathcal{O} et non plus simplement Σ , voir le paragraphe 6.3.4.

On rappelle qu'à partir du changement d'échelle (4.11), on note

$$\mathbf{E}(\cdot, h) = \mathbf{W}(\cdot, Y_3) .$$

On note aussi $\mathbf{C}[\delta]$ et $\mathbf{A}[\delta]$ les opérateurs associés respectivement aux opérateurs \mathbf{C} et \mathbf{A} après changement d'échelle

$$\begin{aligned} \mathbf{C}[\delta] : \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T^1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \\ \mathbf{A}[\delta] : \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) &\rightarrow \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1 \Sigma_0)) . \end{aligned} \quad (6.5)$$

définis par les relations $(\mathbf{C}[\delta]\mathbf{W})(\cdot, Y_3) = (\mathbf{C}\mathbf{E})(\cdot, h)$ et $(\mathbf{A}[\delta]\mathbf{W})(\cdot, Y_3) = (\mathbf{A}\mathbf{E})(\cdot, h)$. Ainsi, dans un système de coordonnées normales (y_α, Y_3) , on a

$$\begin{aligned} \mathbf{C}[\delta](y_\alpha, Y_3; D_\alpha, \partial_3) &= \mathbf{C}(y_\alpha, \delta Y_3; D_\alpha, \delta^{-1} \partial_3) \\ \mathbf{A}[\delta](y_\alpha, Y_3; D_\alpha, \partial_3) &= \mathbf{A}(y_\alpha, \delta Y_3; D_\alpha, \delta^{-1} \partial_3) . \end{aligned} \quad (6.6)$$

D'après la relation (6.4), on a

$$\mathbf{A}[\delta]\mathbf{W} = (\partial_\alpha W_3 - \delta^{-1} \partial_3 W_\alpha) dy^\alpha . \quad (6.7)$$

De plus, l'opérateur $\mathbf{C}[\delta]$ est développable en série entière en δ , car l'opérateur $\epsilon^{ijk}[\delta]$ associé au tenseur de Levi-Civita l'est, voir le paragraphe suivant. Précisément, on a le résultat suivant, voir le théorème 4.10 au chapitre 4.

Théorème 6.2 *L'opérateur $\mathbf{C}[\delta]$ est développable en série entière en δ . Il existe des opérateurs*

$$\mathbf{C}_n : \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1\Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \rightarrow \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T^1\Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) ,$$

tels que

$$\mathbf{C}[\delta] = \delta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{C}_n . \quad (6.8)$$

On peut expliciter les expressions des opérateurs \mathbf{C}_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ceci fait l'objet des sous-sections 6.2.2 et 6.2.3 où on détermine les composantes transverses et surfaciques des opérateurs \mathbf{C}_n . On explicite tout d'abord un développement en série du tenseur de permutation.

6.2.1 Développement du tenseur de Levi-Civita

On rappelle que $\mathbf{g}(h) = \det(a_{\alpha\beta}(h)) > 0$. Le tenseur de Levi-Civita induit un opérateur $\epsilon^{ijk}[\delta]$ après changement d'échelle (4.11). D'après la définition 3.24, il vient

$$\epsilon^{ijk}[\delta] = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}[\delta]}} \epsilon_0(i, j, k) . \quad (6.9)$$

Dans cette sous-section, on va expliciter les premiers termes du développement de l'opérateur $\epsilon^{\alpha\beta\gamma}[\delta]$. On peut développer en série entière en δ le déterminant de la métrique. On note a le déterminant de la matrice de terme général $a_{\alpha\beta}$. On a le résultat suivant.

Lemme 6.3 *Pour h assez petit, la fonction $\frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}(h)}}$ est développable en série entière en h . De plus, elle admet le développement limité suivant à l'ordre 2 en h*

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}(h)}} = \frac{1}{\sqrt{a}} (1 + b_\alpha^\alpha h + O(h^2)) . \quad (6.10)$$

PREUVE. Le déterminant $\mathbf{g}(h)$ est une fonction polynomiale de degré 4 en h car

$$a_{\alpha\beta}(h) = a_{\alpha\beta} - 2hb_{\alpha\beta} + h^2c_{\alpha\beta}$$

voir (4.2). En développant le déterminant d'une matrice 2×2 , il vient

$$\mathbf{g}(h) = a - h(2a_{11}b_{22} + 2a_{11}b_{11} - 4a_{12}b_{12}) + O(h^2)$$

d'où

$$\mathbf{g}(h) = a - 2hb_\alpha^\alpha + O(h^2) .$$

Pour h assez petit, on en déduit l'identité (6.10). ■

Remarque 6.4 Le terme b_α^α est la somme des courbures principales de la variété Σ , ce qui représente le double de la courbure moyenne de Σ .

Dans la suite, on introduit la définition du tenseur de permutation sur la variété Σ .

Définition 6.5 Le tenseur de permutation j sur la variété Σ est défini par ses composantes contravariantes

$$j^{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{a}} \epsilon_0(\alpha, \beta, 3).$$

Remarque 6.6 Le tenseur j est antisymétrique

$$j^{\alpha\beta} = -j^{\beta\alpha}.$$

D'après le lemme 6.3, il vient

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{g}[\delta]}} = \frac{1}{\sqrt{a}} (1 + b_\nu^\nu \delta Y_3 + O(\delta^2)). \quad (6.11)$$

D'après l'identité (6.9) et la relation (6.11), il vient

$$\epsilon^{\alpha\beta 3}[\delta] = j^{\alpha\beta} (1 + b_\nu^\nu \delta Y_3 + O(\delta^2)). \quad (6.12)$$

Ainsi, l'opérateur $\epsilon^{ijk}[\delta]$ admet un développement en série en δ et avec des notations évidentes, on a

$$\epsilon^{\alpha\beta 3}[\delta] = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n (\epsilon^{\alpha\beta 3}[\delta])^n.$$

En particulier, on a

$$(\epsilon^{\alpha\beta 3}[\delta])^0 = j^{\alpha\beta} \quad \text{et} \quad (\epsilon^{\alpha\beta 3}[\delta])^1 = j^{\alpha\beta} b_\nu^\nu Y_3. \quad (6.13)$$

6.2.2 Développement de la composante transverse du rotationnel

D'après la seconde équation du système (6.2), il vient

$$C^3[\delta](\mathbf{W}) = \epsilon^{\alpha\beta 3}[\delta] D_\alpha[\delta] W_\beta. \quad (6.14)$$

On rappelle que d'après l'identité (4.36), on a

$$D_\alpha[\delta] W_\beta = D_\alpha W_\beta + \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{n+1} Y_3^{n+1} (b^n)_\gamma^\nu W_\nu D_\alpha b_\beta^\gamma. \quad (6.15)$$

Donc, d'après l'identité (6.14), il vient

$$C^3(\mathbf{W}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n (\epsilon^{\alpha\beta\gamma} [\delta])^n (D_\alpha W_\beta + \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{n+1} Y_3^{n+1} (b^n)_\gamma^\nu W_\nu D_\alpha b_\beta^\gamma). \quad (6.16)$$

Ainsi, d'après les identités (6.13), on a

$$C^3(\mathbf{W}) = j^{\alpha\beta} D_\alpha W_\beta + \delta Y_3 j^{\alpha\beta} (b_\nu^\nu D_\alpha W_\beta + W_\gamma D_\alpha b_\beta^\gamma) + O(\delta^2). \quad (6.17)$$

Par suite,

$$C_0^3(\mathbf{W}) = 0, \quad C_1^3(\mathbf{W}) = j^{\alpha\beta} D_\alpha W_\beta \quad \text{et} \quad C_2^3(\mathbf{W}) = Y_3 j^{\alpha\beta} (b_\nu^\nu D_\alpha W_\beta + W_\gamma D_\alpha b_\beta^\gamma). \quad (6.18)$$

6.2.3 Développement de la composante surfacique du rotationnel

D'après la première équation du système (6.2), il vient

$$C^\alpha[\delta](\mathbf{W}) = \epsilon^{3\beta\alpha}[\delta](\delta^{-1}\partial_3 W_\beta - D_\beta[\delta]W_3). \quad (6.19)$$

Donc,

$$C^\alpha(\mathbf{W}) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n (\epsilon^{3\beta\alpha}[\delta])^n (\delta^{-1}\partial_3 W_\beta - \partial_\beta W_3) \quad (6.20)$$

car $D_\beta[\delta]W_3 = \partial_\beta W_3$. D'après les identités (6.13), il vient

$$C^\alpha(\mathbf{W}) = \delta^{-1} j^{\beta\alpha} \partial_3 W_\beta + j^{\beta\alpha} (b_\nu^\nu Y_3 - \partial_\beta W_3) + O(\delta). \quad (6.21)$$

Par suite,

$$C_0^\alpha(\mathbf{W}) = j^{\beta\alpha} \partial_3 W_\beta \quad \text{et} \quad C_1^\alpha(\mathbf{W}) = j^{\beta\alpha} (b_\nu^\nu Y_3 - \partial_\beta W_3). \quad (6.22)$$

6.3 Reconstruction du champ magnétique

Dans cette section, on reconstruit le champ magnétique à partir de la loi de Faraday, voir (2.1)

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot } \mathbf{E} \quad \text{dans } \Omega \quad (6.23)$$

et du développement asymptotique du champ électrique calculé au chapitre 5.

6.3.1 La loi de Faraday en paramérisation normale

Dans la suite, $\mathbf{E} = E_i dy^i$ désigne une 1-forme (un champ de tenseur 1-fois covariant) dans le voisinage tubulaire \mathcal{O} et

$$\mathbf{H} = H^i X_i$$

est un champ de vecteurs dans \mathcal{O} (un champ de tenseur 1-fois contravariant) dans les coordonnées normales (y_α, h) . Avec les notations du paragraphe 6.2, la relation (6.23) s'écrit en paramétrisation normale de la façon suivante

$$\mathbf{H}(\cdot, h) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \mathbf{C}\mathbf{E}(\cdot, h) \quad \text{dans } \mathcal{O}$$

et dans les coordonnées (y_α, Y_3) , cette relation s'écrit

$$\mathbf{H}_\delta(\cdot, Y_3) = \frac{1}{i\omega\mu_0} (\mathbf{C}[\delta]\mathbf{W})(\cdot, Y_3) \quad \text{dans } \Omega_\delta \quad (6.24)$$

où $\mathbf{H}_\delta(\cdot, Y_3)$ désigne par abus de notation le champ magnétique après changement d'échelle

$$\mathbf{H}_\delta(\cdot, Y_3) = \mathbf{H}(\cdot, h).$$

Les composantes surfaciques et transverses de la relation précédente s'écrivent

$$\begin{cases} H_\delta^\alpha &= \frac{1}{i\omega\mu_0} C^\alpha[\delta](\mathbf{W}) & \text{dans } \Omega_\delta \\ H_\delta^3 &= \frac{1}{i\omega\mu_0} C^3[\delta](\mathbf{W}) & \text{dans } \Omega_\delta \end{cases} \quad (6.25)$$

6.3.2 Enoncé du résultat principal

Dans la suite, on substitue l'Ansatz (5.9) en champ électrique dans le membre de droite de l'identité (6.23) ; il vient

$$\mathbf{H}_\delta^{\text{is}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot} \left(\sum_{j \geq 0} \mathbf{E}_j^{\text{is}}(\mathbf{x}) \delta^j \right) \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}}, \quad (6.26)$$

$$\mathbf{H}_\delta^{\text{cd}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot} \left(\sum_{j \geq 0} \mathbf{E}_j^{\text{cd}}(\mathbf{x}; \delta) \delta^j \right) \quad \text{dans } \Omega_{\text{cd}}$$

et donc

$$\mathbf{H}_\delta^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \mathbf{C}[\delta] \left(\sum_{j \geq 0} \mathbf{W}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3) \delta^j \right) \quad \text{dans } \Omega_\delta. \quad (6.27)$$

Définition 6.7 Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on note $\mathbf{H}_j^{\text{is}}(\mathbf{x})$ le terme d'ordre δ^j dans le membre de droite de l'identité (6.26), et pour tout $j \geq -1$ on note $\mathbf{H}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3)$ le terme d'ordre δ^j dans le membre de droite de l'identité (6.27).

Notation 6.8 On note $\mathcal{H}_j^{\text{cd}} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_j^{\text{cd}} \times \mathbf{n})$ la composante surfacique du terme \mathbf{H}_j^{cd} et $h_j^{\text{cd}} = \mathbf{H}_j^{\text{cd}} \cdot \mathbf{n}$ sa composante transverse. Ainsi, le terme \mathbf{H}_j^{cd} admet la décomposition suivante

$$\mathbf{H}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3) = \mathcal{H}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3) + h_j^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3)\mathbf{n} \quad \text{pour tout } Y_3 \in I = (0, \infty).$$

On note aussi $\mathbf{H}_{\tau,j}^{\text{is}} = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_j^{\text{is}} \times \mathbf{n})$ la composante surfacique du terme \mathbf{H}_j^{is} sur l'interface Σ .

Le résultat principal de ce paragraphe est le suivant.

Proposition 6.9 Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbf{H}_j^{\text{is}} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}_j^{\text{is}} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}} \quad (6.28)$$

et

$$\mathbf{H}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \sum_{n=0}^{j+1} \mathbf{C}_n \mathbf{W}_{j+1-n}^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3) \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (6.29)$$

De plus, les termes d'ordres 0 et 1 du développement asymptotique du champ magnétique sont donnés par leurs composantes transverses et surfaciques respectives

$$\begin{cases} h_0^{\text{cd}} &= 0 & \text{dans } \Omega_0 \\ \mathcal{H}_0^{\text{cd}}(., Y_3) &= \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} e^{-\lambda Y_3} & \text{dans } \Omega_0 \end{cases} \quad (6.30)$$

et

$$\begin{cases} h_1^{\text{cd}}(., Y_3) = \frac{1}{\lambda} D_\alpha (\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}|_{\Sigma})^\alpha e^{-\lambda Y_3} \\ \mathcal{H}_1^{\text{cd}}(., Y_3) = \left[\mathbf{H}_{\tau,1}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \frac{Y_3}{2} \{ 3b_\sigma^\sigma \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}} - 2\mathbf{n} \times (b_\beta^\sigma (\mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma dy^\beta) \} \right] |_{\Sigma} e^{-\lambda Y_3} \end{cases} \quad (6.31)$$

Remarque 6.10 On peut exprimer $\mathcal{H}_0^{\text{cd}}$ et $\mathcal{H}_1^{\text{cd}}$ en fonction de \mathbf{E}_0^{is} . En effet, d'après la relation (6.28), on a

$$\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \mathbf{n} \times (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})$$

donc, d'après (6.30), il vient

$$\mathcal{H}_0^{\text{cd}}(., Y_3) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \mathbf{n} \times (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})|_{\Sigma} e^{-\lambda Y_3} \quad \text{dans } \Omega_0.$$

D'après la relation (6.28), on a

$$\mathbf{H}_{\tau,1}^{\text{is}} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \mathbf{n} \times (\text{rot } \mathbf{E}_1^{\text{is}} \times \mathbf{n})$$

donc, d'après (5.51), il vient

$$\mathbf{H}_{\tau,1}^{\text{is}} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \mathbf{n} \times (\text{rot } \mathcal{R}^{\text{is}} \circ \mathfrak{T}_1(\mathbf{E}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n}).$$

On utilisera le lemme suivant pour démontrer la proposition 6.9.

Lemme 6.11 *Pour toute 1-forme $\mathbf{u} = u_i dy^i$, on a*

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{u})^\alpha = j^{\beta\alpha} u_\beta \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.32)$$

PREUVE. D'après la relation (3.31), il vient

$$(\mathbf{n} \times \mathbf{u})^\alpha = \epsilon^{pq\alpha} n_p u_q \quad \text{dans } \mathcal{O}. \quad (6.33)$$

Or,

$$\sqrt{\mathbf{g}} = \sqrt{a} \quad \text{sur } \Sigma, \quad \text{et } \mathbf{n} = dy^3. \quad (6.34)$$

On en déduit la relation (6.32). ■

6.3.3 Calcul des premiers termes du développement asymptotique en champ magnétique

Démonstration de la proposition 6.9

Le terme d'ordre δ^j dans le membre de droite de l'identité (6.26) est

$$\frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}_j^{\text{is}}.$$

On en déduit la relation (6.28) pour tout $j \in \mathbb{N}$. En effectuant le produit de Cauchy de la série formelle associée à l'opérateur $\mathbf{C}[\delta]$ et de la série formelle $\sum_{j \geq 0} \mathbf{W}_j^{\text{cd}} \delta^j$, il vient

$$\left(\delta^{-1} \sum_{n \geq 0} \delta^n \mathbf{C}_n \right) \left(\sum_{j \geq 0} \mathbf{W}_j^{\text{cd}} \delta^j \right) = \delta^{-1} \sum_{j \geq 0} \delta^n \sum_{n=0}^{j+1} \mathbf{C}_n \mathbf{W}_{j+1-n}^{\text{cd}} \quad \text{dans } \Omega_\delta.$$

On en déduit que $\mathbf{H}_{-1}^{\text{cd}} = \mathbf{C}_0 \mathbf{W}_0^{\text{cd}} = 0$, ainsi que la relation (6.29) pour tout $j \in \mathbb{N}$. En particulier, on a

$$\mathbf{H}_0^{\text{cd}} = \frac{1}{i\omega\mu_0} (\mathbf{C}_1 \mathbf{W}_0^{\text{cd}} + \mathbf{C}_0 \mathbf{W}_1^{\text{cd}}) \quad (6.35)$$

et

$$\mathbf{H}_1^{\text{cd}} = \frac{1}{i\omega\mu_0} (\mathbf{C}_2 \mathbf{W}_0^{\text{cd}} + \mathbf{C}_1 \mathbf{W}_1^{\text{cd}} + \mathbf{C}_0 \mathbf{W}_2^{\text{cd}}). \quad (6.36)$$

Calcul du terme \mathbf{H}_0^{cd}

On a $\mathbf{W}_0^{\text{cd}} = 0$, donc d'après l'identité (6.35), il vient

$$\mathbf{H}_0^{\text{cd}} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \mathbf{C}_0 \mathbf{W}_1^{\text{cd}}. \quad (6.37)$$

Ainsi, d'après les identités (6.22) et (6.18), il vient

$$\mathcal{H}_0^{\text{cd},\alpha} = \frac{1}{i\omega\mu_0} j^{\beta\alpha} \partial_3 \mathcal{W}_{\beta,1}^{\text{cd}} \quad \text{dans } \Omega_0 \quad (6.38)$$

et

$$h_0^{\text{cd}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\text{cd}}. \quad (6.39)$$

Or, d'après la relation (5.24), il vient

$$\partial_3 \mathcal{W}_{\beta,1}^{\text{cd}}(y_\sigma, Y_3) = (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\beta(y_\sigma, 0) e^{-\lambda Y_3} \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (6.40)$$

Donc,

$$\mathcal{H}_0^{\text{cd},\alpha}(\cdot, Y_3) = \frac{j^{\beta\alpha}}{i\omega\mu_0} (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\beta(\cdot, 0) e^{-\lambda Y_3} \quad (6.41)$$

puis d'après le lemme 6.11, il vient

$$\mathcal{H}_0^{\text{cd}}(\cdot, Y_3) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \mathbf{n} \times (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})(\cdot, 0) e^{-\lambda Y_3}. \quad (6.42)$$

Ainsi, d'après l'identité (6.28) pour $j = 0$, il vient

$$\mathcal{H}_0^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}(y_\beta, 0) e^{-\lambda Y_3} \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (6.43)$$

Calcul du terme \mathbf{H}_1^{cd}

D'après l'identité (6.36), on a

$$\mathbf{H}_1^{\text{cd}} = \frac{1}{i\omega\mu_0} (\mathbf{C}_1 \mathbf{W}_1^{\text{cd}} + \mathbf{C}_0 \mathbf{W}_2^{\text{cd}}) \quad \text{car } \mathbf{W}_0^{\text{cd}} = 0.$$

On calcule à présent la composante normale

$$h_1^{\text{cd}} = \frac{1}{i\omega\mu_0} (C_1^3(\mathbf{W}_1^{\text{cd}}) + C_0^3(\mathbf{W}_2^{\text{cd}})) \quad \text{car } \mathbf{W}_0^{\text{cd}} = 0.$$

D'après les identités (6.18), il vient

$$C_1^3(\mathbf{W}_1^{\text{cd}}) + C_0^3(\mathbf{W}_2^{\text{cd}}) = j^{\alpha\beta} D_\alpha \mathcal{W}_{\beta,1}^{\text{cd}} \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (6.44)$$

D'où, d'après la relation (5.24),

$$h_1^{\text{cd}}(., Y_3) = -\frac{1}{\lambda} \frac{1}{i\omega\mu_0} j^{\alpha\beta} D_\alpha (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\beta(., 0) e^{-\lambda Y_3}. \quad (6.45)$$

De plus $D_\alpha j^{\alpha\beta} = 0$, voir le lemme 3.40. Donc, d'après le lemme 6.11, il vient

$$h_1^{\text{cd}}(., Y_3) = \frac{1}{\lambda} \frac{1}{i\omega\mu_0} D_\alpha (\mathbf{n} \times (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n}))^\alpha(., 0) e^{-\lambda Y_3} \quad (6.46)$$

Par suite, d'après l'identité (6.28) pour $j = 0$, il vient

$$h_1^{\text{cd}}(., Y_3) = \frac{1}{\lambda} D_\alpha (\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}})^\alpha e^{-\lambda Y_3}. \quad (6.47)$$

On explicite maintenant les composantes surfaciques. D'après les identités (6.22), il vient

$$C_1^\alpha(\mathbf{W}_1^{\text{cd}}) + C_0^\alpha(\mathbf{W}_2^{\text{cd}}) = j^{\beta\alpha} \partial_3 \mathcal{W}_{\beta,2}^{\text{cd}} + j^{\beta\alpha} [-\partial_\beta w_1^{\text{cd}} + b_\sigma^\sigma Y_3 \partial_3 \mathcal{W}_{\beta,1}^{\text{cd}}] \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (6.48)$$

Or

$$w_1^{\text{cd}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_0, \quad (6.49)$$

donc

$$C_1^\alpha(\mathbf{W}_1^{\text{cd}}) + C_0^\alpha(\mathbf{W}_2^{\text{cd}}) = j^{\beta\alpha} [\partial_3 \mathcal{W}_{\beta,2}^{\text{cd}} + b_\sigma^\sigma Y_3 \partial_3 \mathcal{W}_{\beta,1}^{\text{cd}}] \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (6.50)$$

Ainsi,

$$\mathcal{H}_1^{\text{cd},\alpha} = \frac{j^{\beta\alpha}}{i\omega\mu_0} [\partial_3 \mathcal{W}_{\beta,2}^{\text{cd}} + b_\sigma^\sigma Y_3 \partial_3 \mathcal{W}_{\beta,1}^{\text{cd}}] \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (6.51)$$

Or, d'après la proposition 5.3, on a la relation suivante

$$\partial_3 \mathcal{W}_{\beta,1}^{\text{cd}}(y_\sigma, Y_3) = (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\beta(y_\sigma, 0) e^{-\lambda Y_3} \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (6.52)$$

De plus, d'après l'identité (5.29), il vient

$$\forall (y_\sigma, Y_3) \in \Omega_0 \quad \partial_3 \mathcal{W}_{\beta,2}^{\text{cd}}(y_\sigma, Y_3) = [a_{\beta,2}^1(y_\sigma) - \lambda a_{\beta,2}^0(y_\sigma) - \lambda Y_3 a_{\beta,2}^1(y_\sigma)] e^{-\lambda Y_3}. \quad (6.53)$$

Donc,

$$\begin{aligned} \partial_3 \mathcal{W}_{\beta,2}^{\text{cd}}(., Y_3) &= \left[(\text{rot } \mathbf{E}_1^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\beta \right]_\Sigma \\ &\quad + \frac{Y_3}{2} \{ b_\sigma^\sigma (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\beta - 2b_\beta^\sigma (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma \} \Big|_\Sigma \Big] e^{-\lambda Y_3}. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Ainsi, d'après la relation (6.51), on a dans Ω_0

$$\mathcal{H}_1^{\text{cd},\alpha}(\cdot, Y_3) = \frac{j^{\beta\alpha}}{i\omega\mu_0} \left[(\text{rot } \mathbf{E}_1^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\beta \Big|_\Sigma + \frac{Y_3}{2} \{ b_\sigma^\sigma (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\beta - 2b_\beta^\sigma (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma \} \Big|_\Sigma \right. \\ \left. + b_\sigma^\sigma Y_3 \{ (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\beta \} \Big|_\Sigma \right] e^{-\lambda Y_3} \quad (6.55)$$

donc,

$$\mathcal{H}_1^{\text{cd},\alpha}(\cdot, Y_3) = \frac{j^{\beta\alpha}}{i\omega\mu_0} \left[(\text{rot } \mathbf{E}_1^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\beta \Big|_\Sigma \right. \\ \left. + \frac{Y_3}{2} \{ 3b_\sigma^\sigma (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\beta - 2b_\beta^\sigma (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma \} \Big|_\Sigma \right] e^{-\lambda Y_3}. \quad (6.56)$$

D'après le lemme 6.11, on en déduit que

$$\mathcal{H}_1^{\text{cd},\alpha}(\cdot, Y_3) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \left[(\mathbf{n} \times (\text{rot } \mathbf{E}_1^{\text{is}} \times \mathbf{n}))^\alpha \Big|_\Sigma + \frac{3Y_3}{2} b_\sigma^\sigma (\mathbf{n} \times (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n}))^\alpha \Big|_\Sigma \right. \\ \left. - j^{\beta\alpha} Y_3 b_\beta^\sigma (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma \Big|_\Sigma \right] e^{-\lambda Y_3}. \quad (6.57)$$

Ainsi, d'après l'identité (6.28) pour $j = 0$ et $j = 1$, il vient

$$\mathcal{H}_1^{\text{cd},\alpha}(\cdot, Y_3) = \left[(\mathbf{H}_{\tau,1}^{\text{is}})^\alpha \Big|_\Sigma + \frac{3Y_3}{2} b_\sigma^\sigma (\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}})^\alpha \Big|_\Sigma - j^{\beta\alpha} Y_3 b_\beta^\sigma (\mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma \Big|_\Sigma \right] e^{-\lambda Y_3}.$$

Or, d'après le lemme 6.11, on a

$$j^{\beta\alpha} b_\beta^\sigma (\mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma = (\mathbf{n} \times (b_\beta^\sigma (\mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma dy^\beta))^\alpha \quad \text{sur } \Sigma.$$

Par suite,

$$\mathcal{H}_1^{\text{cd}}(\cdot, Y_3) = \left[\mathbf{H}_{\tau,1}^{\text{is}} \Big|_\Sigma + \frac{3Y_3}{2} b_\sigma^\sigma \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}} \Big|_\Sigma - Y_3 \mathbf{n} \times (b_\beta^\sigma (\mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma dy^\beta) \right] e^{-\lambda Y_3}.$$

Ceci termine la démonstration de la proposition 6.9.

6.3.4 Une autre méthode de calcul des composantes surfaciques

On propose dans cette sous-section une méthode alternative pour calculer les composantes surfaciques des premiers termes du développement. On utilise pour cela l'opérateur \mathbf{A} introduit au paragraphe 6.2. On note $\mathbf{H}_\tau = (\mathbf{n} \times \mathbf{H}) \times \mathbf{n}$ la composante surfacique de \mathbf{H} dans le voisinage tubulaire \mathcal{O} . D'après la loi de Faraday (6.23), on a la relation suivante en paramétrisation normale

$$\mathbf{H}_\tau(y_\alpha, h) = \frac{1}{i\omega\mu_0} \mathbf{A}(\mathbf{E}) \times \mathbf{n}(y_\alpha, h) \quad \text{dans } \mathcal{O}. \quad (6.58)$$

Après le changement d'échelle (4.11), on note par abus de notation

$$\mathbf{H}_{\tau,\delta}(y_\alpha, Y_3) = \mathbf{H}_\tau(y_\alpha, h).$$

Ainsi, l'identité (6.58) s'écrit

$$\mathbf{H}_{\tau,\delta}(y_\alpha, Y_3) = \frac{1}{i\omega\mu_0} (\mathbf{A}[\delta]\mathbf{W}) \times \mathbf{n}(y_\alpha, Y_3) \quad \text{dans } \Omega_\delta. \quad (6.59)$$

On note aussi

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha = \mathbf{H}_{\tau,\delta}^\alpha. \quad (6.60)$$

Ainsi, d'après la relation (3.31), de l'identité (6.59) il vient

$$\mathcal{H}_\delta^\alpha = \frac{1}{i\omega\mu_0} \epsilon^{\alpha\beta 3} [\delta] (\mathbf{A}[\delta]\mathbf{W})_\beta \quad (6.61)$$

Donc, d'après (6.12), il vient

$$\epsilon^{\alpha\beta 3} [\delta] (\mathbf{A}[\delta]\mathbf{W})_\beta = j^{\alpha\beta} (-\delta^{-1} \partial_3 W_\beta + \partial_\beta W_3 - b_\alpha^\alpha Y_3 \partial_3 W_\beta) + \mathcal{O}(\delta^2). \quad (6.62)$$

En particulier, en substituant le développement asymptotique (5.9) dans (6.62), le terme d'ordre δ^0 dans le membre de droite de l'identité (6.61) s'écrit

$$\mathcal{H}_0^{\text{cd},\alpha} = -\frac{1}{i\omega\mu_0} j^{\alpha\beta} \partial_3 \mathcal{W}_{\beta,1}^{\text{cd}} \quad \text{dans } \Omega_0 \quad (6.63)$$

car $\mathcal{W}_{\alpha,0}^{\text{cd}} = 0$ dans Ω_0 ; de plus, le terme d'ordre δ dans le membre de droite de l'identité (6.61) s'écrit

$$\mathcal{H}_1^{\text{cd},\alpha} = \frac{1}{i\omega\mu_0} j^{\alpha\beta} [-\partial_3 \mathcal{W}_{\beta,2}^{\text{cd}} - b_\gamma^\gamma Y_3 \partial_3 \mathcal{W}_{\beta,1}^{\text{cd}}] \quad \text{dans } \Omega_0 \quad (6.64)$$

car $w_1^{\text{cd}} = 0$ dans Ω_0 . Or, d'après (6.52), on a

$$\partial_3 \mathcal{W}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = (\text{rot } \tilde{\mathbf{E}}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\alpha(y_\beta, 0) e^{-\lambda Y_3} \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (6.65)$$

Donc, d'après (6.63) et la loi de Faraday (6.23), on a

$$\mathcal{H}_0^{\text{cd}}(\cdot, Y_3) = \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}|_\Sigma e^{-\lambda Y_3} \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (6.66)$$

De plus, d'après (5.29), il vient

$$\forall(y_\beta, Y_3) \in \Omega_0 \quad \partial_3 \mathcal{W}_{\alpha,2}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = [a_{1,\alpha}^2(y_\beta) - \lambda a_{0,\alpha}^2(y_\beta) - \lambda Y_3 a_{1,\alpha}^2(y_\beta)] e^{-\lambda Y_3}. \quad (6.67)$$

Ainsi, d'après (6.64), il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1^{\text{cd},\alpha} = \frac{1}{i\omega\mu_0} j^{\beta\alpha} \Big[(\text{rot } \mathbf{E}_1^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\beta \Big|_\Sigma \\ + \frac{Y_3}{2} \{ 3b_\sigma^\sigma (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\beta \Big|_\Sigma - 2b_\beta^\sigma (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma \Big|_\Sigma \} \Big] e^{-\lambda Y_3} . \end{aligned}$$

ce qui est exactement l'identité (6.56).

6.3.5 Calcul des composantes covariantes des premiers termes

Les calculs des premiers termes du développement asymptotique du champ magnétique effectués dans les paragraphes précédents sont contravariants. En effet, les calculs des termes du développement asymptotique du champ électrique au chapitre 5 sont covariants et les calculs des composantes du développement de l'opérateur rotationnel en paramétrisation normale $\mathbf{C}[\delta]$, voir le paragraphe 6.2, sont contravariants.

Dans le résultat suivant, on exprime les composantes covariantes d'une 1-forme surfacique à partir des composantes contravariantes du champ de vecteur associé. On développe pour cela la métrique selon les puissances de δ .

Lemme 6.12 *Pour toute 1-forme $\mathcal{H} = \mathcal{H}_\alpha dy^\alpha$ et pour tout $Y_3 \in I = (0, \infty)$, on a*

$$\mathcal{H}_\alpha(., Y_3) = a_{\alpha\beta} \mathcal{H}^\beta(., Y_3) - 2\delta Y_3 b_{\alpha\beta} \mathcal{H}^\beta(., Y_3) + \delta^2 Y_3^2 c_{\alpha\beta} \mathcal{H}^\beta(., Y_3) . \quad (6.68)$$

PREUVE. Par définition, on a

$$\mathcal{H}_\alpha(., Y_3) = g_{\alpha\beta}[\delta] \mathcal{H}^\beta(., Y_3) .$$

Or, d'après l'identité (4.2), il vient

$$g_{\alpha\beta}[\delta] = a_{\alpha\beta} - 2\delta Y_3 b_{\alpha\beta} + \delta^2 Y_3^2 c_{\alpha\beta}$$

de sorte que la relation (6.68) est vérifiée. ■

Définition 6.13 *On note $\mathcal{H}_{\alpha,0}^{\text{cd}}$ et $\mathcal{H}_{\alpha,1}^{\text{cd}}$ les termes d'ordre 0 et 1 des composantes surfaciques covariantes du développement asymptotique du champ magnétique déterminées à partir de l'identité (6.68) et des termes $\mathcal{H}_0^{\text{cd},\beta}$ et $\mathcal{H}_1^{\text{cd},\beta}$ d'ordre 0 et 1 des composantes surfaciques contravariantes du développement asymptotique. Précisément, on a*

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{\alpha,0}^{\text{cd}}(., Y_3) = a_{\alpha\beta} \mathcal{H}_0^{\text{cd},\beta}(., Y_3) \\ \mathcal{H}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(., Y_3) = a_{\alpha\beta} \mathcal{H}_1^{\text{cd},\beta}(., Y_3) - 2Y_3 b_{\alpha\beta} \mathcal{H}_0^{\text{cd},\beta}(., Y_3) \end{cases} \quad (6.69)$$

La proposition suivante fournit les composantes covariantes des termes d'ordres 0 et 1 du développement asymptotique du champ magnétique. Celles-ci sont calculées à partir des composantes contravariantes et du développement de la métrique.

Remarque 6.14 *Par abus de notation, on note à présent $\mathcal{H}_{\alpha,j}^{\text{is}} = (\mathbf{H}_{\tau,j}^{\text{is}})_{\alpha}$ sur Σ .*

Proposition 6.15 (Champ magnétique covariant) *Pour tout $Y_3 \in I = (0, \infty)$, on a*

$$\mathcal{H}_{\alpha,0}^{\text{cd}}(., Y_3) = \mathcal{H}_{\alpha,0}^{\text{is}}(., 0) e^{-\lambda Y_3} \quad (6.70)$$

et

$$\mathcal{H}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(., Y_3) = \left[\mathcal{H}_{\alpha,1}^{\text{is}}(., 0) + \frac{Y_3}{2} \{ b_{\sigma}^{\sigma} \mathcal{H}_{\alpha,0}^{\text{is}}(., 0) - 2b_{\alpha}^{\sigma} \mathcal{H}_{\sigma,0}^{\text{is}}(., 0) \} \right] e^{-\lambda Y_3}. \quad (6.71)$$

Démonstration de la proposition 6.15

D'après la proposition 6.9, on a

$$\mathcal{H}_0^{\text{cd},\beta}(., Y_3) = (\mathbf{H}_{\tau,1}^{\text{is}}|_{\Sigma})^{\beta} e^{-\lambda Y_3}.$$

Donc, d'après la définition 6.13, on en déduit que

$$\mathcal{H}_{\alpha,0}^{\text{cd}}(., Y_3) = a_{\alpha\beta} (\mathbf{H}_{\tau,1}^{\text{is}}|_{\Sigma})^{\beta} e^{-\lambda Y_3}$$

ce qui prouve la relation (6.70). D'après les identités (6.30) et (6.31), il vient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(., Y_3) = a_{\alpha\beta} \left[(\mathbf{H}_{\tau,1}^{\text{is}}|_{\Sigma})^{\beta} + \frac{3Y_3}{2} b_{\sigma}^{\sigma} (\mathbf{H}_{\tau,1}^{\text{is}}|_{\Sigma})^{\beta} - j^{\nu\beta} Y_3 b_{\nu}^{\sigma} (\mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_{\sigma} |_{\Sigma} \right] e^{-\lambda Y_3} \\ - 2Y_3 b_{\alpha\beta} (\mathbf{H}_{\tau,1}^{\text{is}}|_{\Sigma})^{\beta} e^{-\lambda Y_3} \end{aligned} \quad (6.72)$$

de sorte qu'on a la relation

$$\mathcal{H}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(., Y_3) = \left[\mathcal{H}_{\alpha,1}^{\text{is}} + Y_3 \left\{ \frac{3}{2} b_{\sigma}^{\sigma} \mathcal{H}_{\alpha,0}^{\text{is}} - a_{\alpha\beta} j^{\nu\beta} b_{\nu}^{\sigma} (\mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_{\sigma} - 2b_{\alpha\beta} (\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}})^{\beta} \right\} |_{\Sigma} \right] e^{-\lambda Y_3}.$$

Pour prouver la relation (6.71), il suffit donc de démontrer l'identité suivante

$$\frac{3}{2} b_{\sigma}^{\sigma} \mathcal{H}_{\alpha,0}^{\text{is}} - a_{\alpha\beta} j^{\nu\beta} b_{\nu}^{\sigma} (\mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_{\sigma} - 2b_{\alpha\beta} (\mathbf{H}_{\tau,1}^{\text{is}})^{\beta} = \frac{1}{2} b_{\sigma}^{\sigma} \mathcal{H}_{\alpha,0}^{\text{is}} - b_{\alpha}^{\sigma} \mathcal{H}_{\sigma,0}^{\text{is}} \quad \text{sur } \Sigma$$

soit encore

$$b_{\sigma}^{\sigma} \mathcal{H}_{\alpha,0}^{\text{is}} - a_{\alpha\beta} j^{\nu\beta} b_{\nu}^{\sigma} (\mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_{\sigma} - b_{\alpha}^{\sigma} \mathcal{H}_{\sigma,0}^{\text{is}} = 0 \quad \text{sur } \Sigma \quad (6.73)$$

puisque

$$b_{\alpha\beta} (\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}})^{\beta} = b_{\alpha}^{\sigma} \mathcal{H}_{\sigma,0}^{\text{is}} \quad \text{sur } \Sigma.$$

Or,

$$\mathbf{H}_0^{\text{is}} = \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}} \quad \text{sur } \Sigma \quad \text{car} \quad h_0^{\text{is}} = h_0^{\text{cd}} = 0 \quad \text{sur } \Sigma.$$

Ainsi, d'après la relation (3.30), il vient

$$j^{\nu\beta} b_\nu^\sigma (\mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_\sigma = -j^{\nu\beta} \epsilon_{3\mu\sigma} b_\nu^\sigma (\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}})^\mu \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.74)$$

De plus,

$$j^{\nu\beta} \epsilon_{3\mu\sigma} = \delta_\mu^\nu \delta_\sigma^\beta - \delta_\sigma^\nu \delta_\mu^\beta \quad \text{sur } \Sigma$$

de sorte que,

$$j^{\nu\beta} b_\nu^\sigma \mathcal{H}_{\sigma,0}^{\text{is}} = -b_\nu^\beta (\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}})^\nu + b_\sigma^\sigma (\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}})^\beta \quad \text{sur } \Sigma$$

donc

$$g_{\alpha\beta} j^{\nu\beta} b_\nu^\sigma \mathcal{H}_{\sigma,0}^{\text{is}} = -b_\alpha^\sigma \mathcal{H}_{\sigma,0}^{\text{is}} + b_\sigma^\sigma \mathcal{H}_{\alpha,0}^{\text{is}} \quad \text{sur } \Sigma.$$

Par suite, l'identité (6.73) est vérifiée.

6.4 Développement asymptotique du champ magnétique

Dans cette partie, on effectue une étude de l'effet de peau en champ magnétique. On adopte une démarche similaire à celle des chapitres 2, 3, 4 et 5 en mettant l'accent uniquement sur les changements par rapport à l'étude en champ électrique.

6.4.1 Formulation variationnelle

Dans cette section, on reprend les notations du chapitre 2. On s'intéresse toujours au problème de Maxwell (2.4) en champ électromagnétique avec la condition au bord de l'isolant parfait (2.2). On rappelle que $\kappa > 0$. De plus, sous l'hypothèse spectrale 2.24 et pour $\delta > 0$ assez petit, il existe une solution $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$ au problème variationnel (2.18)-(2.19) associée à une donnée $\mathbf{F} \in \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega)$ à support dans le domaine Ω_{is} . On définit le champ magnétique \mathbf{H}_δ à partir de la loi de Faraday

$$\mathbf{H}_\delta = \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}_\delta \quad \text{dans } \Omega.$$

D'après le théorème 2.21, $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$ et $\mathbf{H}_\delta \in \mathbf{X}_N(\Omega)$ sont solutions des équations de Maxwell (2.2)-(2.4). On effectue dans cette dernière partie une étude en champ magnétique des équations (2.2)-(2.4). Les conditions de transmission du champ magnétique à l'interface Σ diffèrent de celles du champ électrique.

Conditions de transmission à l'interface

En conséquence des lemmes 2.7 et 2.8, on en déduit les conditions générales de transmission du champ magnétique sur l'interface Σ .

Lemme 6.16 Soit $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tel que $\frac{1}{\varepsilon(\delta)}\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$. Soient \mathbf{E}_δ et \mathbf{H}_δ dans $\mathbf{L}^2(\Omega)$ des solutions du problème (2.4). Alors, on a

$$[\mathbf{H}_\delta]_\Sigma = 0 \quad \text{et} \quad \left[\frac{1}{\varepsilon(\delta)} \text{rot } \mathbf{H}_\delta \times \mathbf{n} \right]_\Sigma = 0.$$

De plus,

$$\text{div } \mathbf{H}_\delta = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbf{L}^2(\Omega).$$

Remarque 6.17 La seconde condition de transmission du lemme 6.16 s'écrit

$$\frac{1}{1 + \frac{i}{\delta^2}} \text{rot } \mathbf{H}_\delta^{\text{cd}} \times \mathbf{n} = \text{rot } \mathbf{H}_\delta^{\text{is}} \times \mathbf{n} \quad \text{sur} \quad \Sigma.$$

Formulation variationnelle en champ magnétique

A partir du lemme 2.14, on démontre que $\mathbf{H}_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{N}(\Omega)$ vérifie le problème variationnel suivant

Trouver $\mathbf{H}_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{N}(\Omega)$ tel que $\forall \mathbf{K} \in \mathbf{X}_\mathbf{N}(\Omega)$

$$\int_\Omega \left(-\frac{1}{\varepsilon(\delta)} \text{rot } \mathbf{H}_\delta \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{K}} + \kappa^2 \mu \mathbf{H}_\delta \cdot \bar{\mathbf{K}} \right) d\mathbf{x} = \frac{1}{i\kappa} \int_\Omega \text{rot } \frac{1}{\varepsilon(\delta)} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{K}} d\mathbf{x}. \quad (6.75)$$

La formulation forte du problème (6.75) dans les sous-domaines Ω_{is} et Ω_{cd} est similaire à la formulation forte en champ électrique, voir (2.8). Cependant, les conditions de transmission du champ magnétique \mathbf{H}_δ à l'interface Σ diffèrent de celles du champ électrique \mathbf{E}_δ .

Formulation forte des équations en champ magnétique

Soit $\mathbf{H}_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{N}(\Omega)$ une solution de la formulation variationnelle (6.75). Alors, \mathbf{H}_δ satisfait les relations suivantes au sens des distributions

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\text{rot rot } \mathbf{H}_\delta^{\text{is}} + \kappa^2 \mathbf{H}_\delta^{\text{is}} & = & \frac{1}{i\kappa} \text{rot } \mathbf{F}^{\text{is}} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ -\frac{1}{(1+\frac{i}{\delta^2})} \text{rot rot } \mathbf{H}_\delta^{\text{cd}} + \kappa^2 \mathbf{H}_\delta^{\text{cd}} & = & 0 \quad \text{dans } \Omega_{\text{cd}} \\ [\mathbf{H}_\delta \times \mathbf{n}]_\Sigma & = & 0 \\ \frac{1}{1+\frac{i}{\delta^2}} \text{rot } \mathbf{H}_\delta^{\text{cd}} \times \mathbf{n} & = & \text{rot } \mathbf{H}_\delta^{\text{is}} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \\ \mathbf{H}_\delta^{\text{is}} \times \mathbf{n} & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (6.76)$$

Réciproquement, si \mathbf{H}_δ satisfait les relations (6.76) au sens des distributions, alors \mathbf{H}_δ vérifie l'identité suivante au sens des distributions

$$-\operatorname{rot} \frac{1}{\varepsilon(\delta)} \operatorname{rot} \mathbf{H}_\delta + \kappa^2 \mu \mathbf{H}_\delta = \frac{1}{i\kappa} \operatorname{rot} \frac{1}{\varepsilon(\delta)} \mathbf{F} \quad \text{dans } \Omega \quad (6.77)$$

et puisque $\kappa > 0$ et $\mu > 0$, \mathbf{H}_δ vérifie aussi la relation suivante au sens des distributions

$$\operatorname{div} \mathbf{H}_\delta = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

6.4.2 Equations en paramétrisation normales

Dans cette sous-section, on reprend les notations du chapitre 3. En particulier, (y_α, h) désigne un système de coordonnées normales dans un voisinage tubulaire \mathcal{O} de Σ dans le domaine Ω_{cd} . On choisit à présent de considérer \mathbf{H} comme une 1-forme définie sur \mathcal{O} , ce que l'on note en coordonnées normales $\mathbf{H} = H_i dy^i$. D'après l'équation (6.76)₂, l'opérateur différentiel dans \mathcal{O} exprimé à l'aide de dérivées covariantes ∇ a une expression similaire à celle issue de l'étude en champ électrique, voir la proposition 3.45. Cependant les conditions de transmission du champ magnétique à l'interface diffèrent de celles du champ électrique.

Conditions de transmission à l'interface

Proposition 6.18 *Les conditions de transmission du champ magnétique à travers Σ s'écrivent en paramétrisation normale*

$$\begin{cases} H_\alpha^{\text{cd}} dy^\alpha &= \mathbf{H}^{\text{is}} - (\mathbf{H}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \\ \frac{1}{1+\frac{i}{\delta^2}} (\nabla_3 H_\alpha^{\text{cd}} - \nabla_\alpha H_3^{\text{cd}}) dy^\alpha &= (\operatorname{rot} \mathbf{H} \times \mathbf{n})^{\text{is}} & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (6.78)$$

PREUVE. La première équation est une conséquence de (6.76)₃. La seconde traduit en termes de dérivées covariantes la condition de transmission (6.76)₄, voir la relation (3.48)₂ du chapitre 3. ■

D'après (6.76), on a

$$-\frac{1}{(1+\frac{i}{\delta^2})} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}_\delta^{\text{cd}} + \kappa^2 \mathbf{H}_\delta^{\text{cd}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\text{cd}} \quad (6.79)$$

donc la réduction normale de l'opérateur différentiel dans \mathcal{O} est donné par les expressions (3.50)₁ et (3.51)₁. Seule change la réduction normale des conditions de transmission. La proposition suivante fournit l'expression en paramétrisation normale des relations (6.78) définies sur l'interface Σ .

Proposition 6.19 Soit $\mathbf{H} \in \Gamma(T_1\mathcal{O})$. La réduction normale des équations (6.78) écrites en composantes covariantes, donne les équations suivantes. En composantes surfaciques (pour $j = \alpha$), on obtient

$$\begin{cases} H_\alpha^{\text{cd}} dy^\alpha &= (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\text{is}}) \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \\ \frac{1}{1+\frac{i}{\delta^2}} (\partial_3^h H_\alpha^{\text{cd}} - \partial_\alpha H_3^{\text{cd}}) dy^\alpha &= \text{rot } \mathbf{H}^{\text{is}} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \end{cases} \quad (6.80)$$

PREUVE. La relation (6.80)₁ est une conséquence directe de (6.78)₁. L'identité (6.80)₂ est une conséquence directe de (6.78)₂ et sa démonstration est similaire à celle de (3.51)₃. ■

6.4.3 Développement en série entière de l'opérateur 3D

Dans cette sous-section, on reprend les notations du chapitre 4. On développe dans ce paragraphe les conditions de transmission (6.80). La condition de transmission (6.80)₁ permet de définir un nouvel opérateur, jouant un rôle similaire à celui de l'opérateur \mathbf{B} dans l'étude en champ électrique

$$\mathbf{D} : \mathcal{C}^\infty((0, \eta), \Gamma(T_1\Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \rightarrow \Gamma(T_1\Sigma_0) \quad (6.81)$$

par l'équation

$$D_\alpha(\mathbf{H}) dy^\alpha = H_\alpha dy^\alpha \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.82)$$

Remarque 6.20 L'opérateur \mathbf{D} est un opérateur différentiel d'ordre 0.

Le changement d'échelle (4.11) permet de définir un nouvel opérateur noté $\mathbf{D}[\delta]$ à partir de l'opérateur \mathbf{D} ci-dessus. On note aussi dans la suite

$$\mathbf{H}(\cdot, h) = \mathbf{V}(\cdot, Y_3).$$

Définition 6.21 On définit

$$\mathbf{D}[\delta] : \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1\Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \rightarrow \Gamma(T_1\Sigma_0) \quad (6.83)$$

l'opérateur sous-jacent à l'opérateur \mathbf{D} et obtenu après le changement d'échelle (4.11).

Ainsi, dans un système de coordonnées normales, on a

$$(\mathbf{D}[\delta]\mathbf{V})(y_\alpha, 0) = (\mathbf{D}\mathbf{H})(y_\alpha, 0). \quad (6.84)$$

D'après (6.82), il vient

$$(\mathbf{D}[\delta]\mathbf{V})_\alpha dy^\alpha = V_\alpha^{\text{cd}} dy^\alpha \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.85)$$

Par continuité de la composante surfacique du champ magnétique à l'interface Σ , voir (6.80)₁, on a donc la relation suivante

$$V_\alpha^{\text{cd}} dy^\alpha = (\mathbf{n} \times \mathbf{H}^{\text{is}}) \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.86)$$

Condition de transmission (6.80)₂ du champ magnétique

On développe ici la condition de transmission

$$\left[\frac{1}{\varepsilon(\delta)} \text{rot } \mathbf{H} \times \mathbf{n} \right]_\Sigma = 0.$$

Cette relation s'écrit de la façon suivante en paramétrisation normale

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (i\delta^2)^n (\partial_3^h H_\alpha^{\text{cd}} - \partial_\alpha H_3^{\text{cd}}) dy^\alpha = \text{rot } \mathbf{H}^{\text{is}} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma,$$

ou encore avec les notations du paragraphe 6.2

$$\sum_{n=1}^{\infty} (i\delta^2)^n \mathbf{A} \mathbf{H}^{\text{cd}} = \text{rot } \mathbf{H}^{\text{is}} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma.$$

Ainsi, après le changement d'échelle (4.11), il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty} (i\delta^2)^n (\partial_\alpha V_3^{\text{cd}} - \delta^{-1} \partial_3 V_\alpha^{\text{cd}}) dy^\alpha = \text{rot } \mathbf{H}^{\text{is}} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.87)$$

L'opérateur $\mathbf{T}[\delta] := \sum_{n=1}^{\infty} (i\delta^2)^n \mathbf{A}[\delta]$ est développable en série entière. Il existe des opérateurs

$$\mathbf{T}_n : \mathcal{C}^\infty(I_\delta, \Gamma(T_1 \Sigma_0) \times \mathcal{C}^\infty(\Sigma_0)) \rightarrow \Gamma(T_1 \Sigma_0) \quad (6.88)$$

tels que

$$\mathbf{T}[\delta] = \sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \mathbf{T}_n \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.89)$$

Clairement, d'après (6.87), il vient

$$\mathbf{T}_n \mathbf{V} = \begin{cases} (-i)^p \partial_3 V_\alpha^{\text{cd}} dy^\alpha & \text{si } n = 2p - 1 \\ i^p \partial_\alpha V_3^{\text{cd}} dy^\alpha & \text{si } n = 2p \end{cases} \quad (6.90)$$

Par suite, d'après l'identité (6.87), on a la relation suivante

$$\sum_{n=1}^{\infty} \delta^n \mathbf{T}_n \mathbf{V}^{\text{cd}} = \text{rot } \mathbf{H}^{\text{is}} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma \quad (6.91)$$

et les opérateurs \mathbf{T}_n sont donnés par les relations (6.90).

6.4.4 Développement asymptotique

Dans cette sous-section, on reprend les notations du chapitre 5. On se place dans le cadre de l'hypothèse spectrale 2.24. On considère une solution \mathbf{H}_δ du problème (6.76). On effectue l'Ansatz suivant pour le champ magnétique \mathbf{H}_δ , comparer avec (5.9) au chapitre 5 pour le champ électrique,

$$\begin{cases} \mathbf{H}_\delta^{\text{is}}(\mathbf{x}) \sim \sum_{j \geq 0} \mathbf{H}_j^{\text{is}}(\mathbf{x}) \delta^j & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_{\text{is}} \\ \mathbf{H}_\delta^{\text{cd}}(\mathbf{x}) \sim \sum_{j \geq 0} \mathbf{H}_j^{\text{cd}}(\mathbf{x}; \delta) \delta^j & \text{pour } \mathbf{x} \in \Omega_{\text{cd}} \end{cases} \quad (6.92)$$

où

$$\mathbf{H}_j^{\text{cd}}(\mathbf{x}; \delta) = \mathbf{V}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{h}{\delta}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O} \quad (6.93)$$

et

$$\mathbf{V}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } Y_3 \rightarrow +\infty. \quad (6.94)$$

Notation 6.22 On note $\mathcal{V}_j^{\text{cd}} = (\mathbf{n} \times \mathbf{V}_j^{\text{cd}}) \times \mathbf{n}$ le champ magnétique surfacique issu de \mathbf{V}_j^{cd} et $v_j^{\text{cd}} = \mathbf{V}_j^{\text{cd}} \cdot \mathbf{n}$ sa composante transverse, de sorte que

$$\mathbf{V}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3) = \mathcal{V}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3) + v_j^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3) \mathbf{n} \quad \text{où } \mathcal{V}_j^{\text{cd}} = \mathcal{V}_{\alpha,j}^{\text{cd}} dy^\alpha.$$

Dans la suite, on note aussi $\mathbf{H}_j^{\text{is}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{H}}_j^{\text{is}}(y_\alpha, 0)$ pour tout $\mathbf{x} \in \Sigma$.

On substitue l'Ansatz (6.92) dans l'équation (6.79) puis on identifie les termes selon les puissances de δ .

Equations transverses

On obtient les équations vérifiées par v_j^{cd} dans Ω_0 en remplaçant dans les équations (5.14) les termes w_j^{cd} par v_j^{cd} et \mathbf{W}_j^{cd} par \mathbf{V}_j^{cd} .

Equations surfaciques

On obtient les équations vérifiées par $\mathcal{V}_{\alpha,j}^{\text{cd}}$ dans Ω_0 en remplaçant dans les équations (5.12) les termes \mathbf{W}_j^{cd} par \mathbf{V}_j^{cd} . Les équations (5.13) vérifiées par les termes du développement asymptotique du champ électrique ne sont pas vérifiées par les termes $\mathcal{V}_{\alpha,j}^{\text{cd}}$. Cependant, d'après la relation (6.86), il vient pour tout $j \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{V}_{\alpha,j}^{\text{cd}} dy^\alpha = (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_j^{\text{is}}) \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.95)$$

Condition de transmission (6.80)₂ du champ magnétique

En substituant l'Ansatz (6.92) dans la relation (6.91), il vient

$$\sum_{j \geq 1} \delta^j \sum_{k=1}^j \mathbf{T}_k \mathbf{V}_{j-k}^{\text{cd}} = \text{rot} \sum_{j \geq 0} \mathbf{H}_j^{\text{is}} \delta^j \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma$$

puis en identifiant les termes selon les puissances de δ , on en déduit les relations suivantes sur Σ

$$\begin{cases} \text{rot } \mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 \\ \sum_{k=1}^j \mathbf{T}_k \mathbf{V}_{j-k}^{\text{cd}} = \text{rot } \mathbf{H}_j^{\text{is}} \times \mathbf{n} \quad \text{si } j \geq 1 \end{cases} \quad (6.96)$$

Equations dans le domaine isolant Ω_{is}

On rappelle que l'espace fonctionnel $\mathbf{X}(\Omega_{\text{is}})$ est défini au chapitre 2, voir la définition 2.4. On introduit les espaces fonctionnels suivants

$$\mathbf{X}_{\text{NT}}(\Omega_{\text{is}}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{X}(\Omega_{\text{is}}) \mid \mathbf{u}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \quad \mathbf{u}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma\}$$

et

$$\mathbf{X}_{\text{N}}^{\partial\Omega}(\Omega_{\text{is}}) = \{\mathbf{u} \in \mathbf{X}(\Omega_{\text{is}}) \mid \mathbf{u}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega\}. \quad (6.97)$$

Enfin, on introduit un opérateur Ψ_Σ^{is} de relèvement de traces normales sur Σ dans le domaine isolant Ω_{is}

$$\Psi_\Sigma^{\text{is}} : \mathbf{H}^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma) \rightarrow \mathbf{H}^s(\Omega_{\text{is}})$$

pour $s > 0$ assez grand. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}$, si $\mathbf{H}_j^{\text{cd}} \cdot \mathbf{n} \in \mathbf{H}^{s-\frac{1}{2}}(\Sigma)$, alors

$$\mathbf{u}_j^{\text{is}} := \Psi_\Sigma^{\text{is}}(\mathbf{H}_j^{\text{cd}} \cdot \mathbf{n}) \in \mathbf{H}^s(\Omega_{\text{is}}) \quad \text{vérifie} \quad \mathbf{u}_j^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{H}_j^{\text{cd}} \cdot \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma.$$

On utilisera par la suite que cet opérateur Ψ_Σ^{is} est continu. On suppose à présent que la donnée \mathbf{F} est indépendante de δ et $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ satisfait $\text{rot } \frac{1}{\varepsilon(\delta)} \mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. En substituant l'Ansatz (6.92) dans l'équation (6.75) puis en identifiant les termes selon les puissances

de δ , on est ramené à résoudre les problèmes suivants posés dans le domaine isolant :

Trouver $\mathbf{H}_0^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\mathbf{N}}^{\partial\Omega}(\Omega_{\text{is}})$, avec $\mathbf{H}_0^{\text{is}} - \Psi_{\Sigma}^{\text{is}}(\mathbf{H}_0^{\text{cd}} \cdot \mathbf{n}) \in \mathbf{X}_{\mathbf{NT}}(\Omega_{\text{is}})$, tel que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{K} \in \mathbf{X}_{\mathbf{NT}}(\Omega_{\text{is}}), \int_{\Omega_{\text{is}}} (-\text{rot } \mathbf{H}_0^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{K}} + \kappa^2 \mathbf{H}_0^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{K}}) \, d\mathbf{x} + \int_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{\tau} \, ds \\ = \frac{1}{i\kappa} \int_{\Omega_{\text{is}}} \text{rot } \mathbf{F}^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{K}} \, d\mathbf{x} \quad (6.98) \end{aligned}$$

et pour tout $j \in \mathbb{N}^*$,

Trouver $\mathbf{H}_j^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\mathbf{N}}^{\partial\Omega}(\Omega_{\text{is}})$, avec $\mathbf{H}_j^{\text{is}} - \Psi_{\Sigma}^{\text{is}}(\mathbf{H}_j^{\text{cd}} \cdot \mathbf{n}) \in \mathbf{X}_{\mathbf{NT}}(\Omega_{\text{is}})$, tel que

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{K} \in \mathbf{X}_{\mathbf{NT}}(\Omega_{\text{is}}), \int_{\Omega_{\text{is}}} (-\text{rot } \mathbf{H}_j^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{K}} + \kappa^2 \mathbf{H}_j^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{K}}) \, d\mathbf{x} \\ + \int_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{H}_j^{\text{is}} \times \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{\tau} \, ds = 0. \quad (6.99) \end{aligned}$$

Construction des termes du développement

Composante normale du terme d'ordre 0 dans le domaine conducteur

D'après (5.14), on a $v_0^{\text{cd}} = 0$ dans Ω_0 .

Terme d'ordre 0 dans le domaine isolant Ω_{is}

Comme $v_0^{\text{cd}} = 0$ dans Ω_0 , le terme \mathbf{H}_0^{is} vérifie la condition aux limites suivante à l'interface

$$\mathbf{H}_0^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.100)$$

C'est la condition du conducteur parfait pour le champ magnétique sur Σ . De plus, d'après (6.96), le terme \mathbf{H}_0^{is} vérifie aussi la condition aux limites suivante

$$\text{rot } \mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.101)$$

D'après la relation (6.98), le problème à résoudre pour le terme \mathbf{H}_0^{is} est donc le suivant

Trouver $\mathbf{H}_0^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\mathbf{NT}}(\Omega_{\text{is}})$ tel que

$$\forall \mathbf{K} \in \mathbf{X}_{\mathbf{NT}}(\Omega_{\text{is}}), \int_{\Omega_{\text{is}}} (-\text{rot } \mathbf{H}_0^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{K}} + \kappa^2 \mathbf{H}_0^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{K}}) \, d\mathbf{x} = \frac{1}{i\kappa} \int_{\Omega_{\text{is}}} \text{rot } \mathbf{F}^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{K}} \, d\mathbf{x}. \quad (6.102)$$

On rappelle que sous l'hypothèse spectrale 2.24, le terme $\mathbf{E}_0^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\mathbf{TN}}(\Omega_{\text{is}})$ est l'unique solution du problème (5.20).

Proposition 6.23 Soit $\mathbf{E}_0^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$ la solution du problème (5.20). Alors,

$$\mathbf{H}_0^{\text{is}} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}} \quad (6.103)$$

est l'unique solution du problème (6.102).

PREUVE. On pose $\mathbf{u}_0^{\text{is}} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}}$ dans Ω_{is} où $\mathbf{E}_0^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$ est la solution du problème (5.20). D'après la relation (5.20), pour tout $\mathbf{E}' \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$, on a

$$\int_{\Omega_{\text{is}}} \frac{1}{\mu} (i\omega\mu_0 \mathbf{u}_0^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \mathbf{E}_0^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{E}}') \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{\text{is}}} \mathbf{F}^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{E}}' \, d\mathbf{x}.$$

Or, en intégrant par partie, il vient au sens des distributions

$$\int_{\Omega_{\text{is}}} \mathbf{u}_0^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' \, d\mathbf{x} = \langle \text{rot } \mathbf{u}_0^{\text{is}}, \bar{\mathbf{E}}' \rangle_{\Omega_{\text{is}}} + \langle \mathbf{u}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n}, \bar{\mathbf{E}}'_{\tau} \rangle_{\partial\Omega}$$

car $\mathbf{E}'_{\tau} = 0$ sur Σ . Donc,

$$\int_{\Omega_{\text{is}}} \frac{1}{\mu} (i\omega\mu_0 \text{rot } \mathbf{u}_0^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \mathbf{E}_0^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{E}}') \, d\mathbf{x} + \frac{i\omega\mu_0}{\mu} \langle \mathbf{u}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n}, \bar{\mathbf{E}}'_{\tau} \rangle_{\partial\Omega} = \int_{\Omega_{\text{is}}} \mathbf{F}^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{E}}' \, d\mathbf{x}.$$

Ainsi, on a les relations suivantes au sens des distributions

$$\begin{cases} i\omega\mu_0 \text{rot } \mathbf{u}_0^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{E}_0^{\text{is}} &= \mu \mathbf{F}^{\text{is}} & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \mathbf{u}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (6.104)$$

En particulier, $\mathbf{u}_0^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\text{NT}}(\Omega_{\text{is}})$. En prenant le rotationnel de la première équation de (6.104), il vient au sens des distributions

$$i\omega\mu_0 \text{rot rot } \mathbf{u}_0^{\text{is}} - \kappa^2 \text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} = \mu \text{rot } \mathbf{F}^{\text{is}} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}}$$

et donc par définition de \mathbf{u}_0^{is} , il vient au sens des distributions

$$\text{rot rot } \mathbf{u}_0^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{u}_0^{\text{is}} = -\frac{1}{i\kappa} \text{rot } \mathbf{F}^{\text{is}} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}}. \quad (6.105)$$

En particulier, pour tout $\mathbf{K} \in \mathbf{X}_{\text{NT}}(\Omega_{\text{is}})$, on a

$$\int_{\Omega_{\text{is}}} (\text{rot rot } \mathbf{u}_0^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{u}_0^{\text{is}}) \cdot \bar{\mathbf{K}} \, d\mathbf{x} = -\frac{1}{i\kappa} \int_{\Omega_{\text{is}}} \text{rot } \mathbf{F}^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{K}} \, d\mathbf{x}. \quad (6.106)$$

Or, en intégrant par partie le premier terme du membre de gauche de cette dernière égalité, pour tout $\mathbf{K} \in \mathbf{X}_{\text{NT}}(\Omega_{\text{is}})$, on a

$$\int_{\Omega_{\text{is}}} \text{rot rot } \mathbf{u}_0^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{K}} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{\text{is}}} \text{rot } \mathbf{u}_0^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{K}} \, d\mathbf{x} - \langle \text{rot } \mathbf{u}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n}, \bar{\mathbf{K}}_{\tau} \rangle_{\Sigma}$$

car $\mathbf{K} \times \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. Ainsi, d'après (6.106), il vient

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{K} \in \mathbf{X}_{\text{NT}}(\Omega_{\text{is}}), \int_{\Omega_{\text{is}}} (\text{rot } \mathbf{u}_0^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{K}} - \kappa^2 \mathbf{u}_0^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{K}}) \, d\mathbf{x} \\ = \frac{1}{i\kappa} \int_{\Omega_{\text{is}}} \text{rot } \mathbf{F}^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{K}} \, d\mathbf{x} + \int_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{u}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{K}}_{\tau} \, ds. \end{aligned} \quad (6.107)$$

Donc, $\mathbf{u}_0^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\text{NT}}(\Omega_{\text{is}})$ vérifie le problème (6.98). Pour conclure que $\mathbf{u}_0^{\text{is}} = \mathbf{E}_0^{\text{is}}$, il suffit de prouver que le problème (6.102) est injectif. C'est une conséquence de l'hypothèse spectrale 2.24. Soit $\mathbf{u} \in \mathbf{X}_{\text{NT}}(\Omega_{\text{is}})$ tel que

$$\forall \mathbf{K} \in \mathbf{X}_{\text{NT}}(\Omega_{\text{is}}), \int_{\Omega_{\text{is}}} (\text{rot } \mathbf{u}^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{K}} - \kappa^2 \mathbf{u}_0^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{K}}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

D'après la loi d'Ampère, on pose

$$\mathbf{E}^{\text{is}} = -\frac{\mu}{i\kappa} \text{rot } \mathbf{u}^{\text{is}} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}}.$$

Ainsi,

$$\forall \mathbf{K} \in \mathbf{X}_{\text{NT}}(\Omega_{\text{is}}), \int_{\Omega_{\text{is}}} \left(-\frac{i\kappa}{\mu} \mathbf{E}^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{K}} - \kappa^2 \mathbf{u}^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{K}} \right) \, d\mathbf{x} = 0.$$

Or, en intégrant par partie, il vient au sens des distributions

$$\int_{\Omega_{\text{is}}} \mathbf{E}^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{K}} \, d\mathbf{x} = \langle \text{rot } \mathbf{E}^{\text{is}}, \mathbf{K} \rangle_{\Omega_{\text{is}}} + \langle \mathbf{E}^{\text{is}} \times \mathbf{n}, \mathbf{K}_{\tau} \rangle_{\Sigma}$$

car $\mathbf{K}_{\tau} = 0$ sur $\partial\Omega$. Donc, on a les relations suivantes au sens des distributions

$$\begin{cases} \frac{i\kappa}{\mu} \text{rot } \mathbf{E}^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{u}^{\text{is}} = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \mathbf{E}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Sigma \end{cases}$$

En prenant le rotationnel de la première équation du système précédent, il vient au sens des distributions

$$\text{rot rot } \mathbf{E}^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{E}^{\text{is}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}}.$$

D'après l'hypothèse spectrale 2.24, on en déduit que

$$\mathbf{E}^{\text{is}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}}, \quad \text{i.e.} \quad \text{rot } \mathbf{u}^{\text{is}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}}.$$

Or, le domaine Ω_{is} est simplement connexe, donc il existe $\varphi \in H^1(\Omega_{\text{is}})$ unique à une constante additive près, tel que

$$\mathbf{u}^{\text{is}} = \nabla \varphi \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}}.$$

De plus, on a $\operatorname{div} \mathbf{u}^{\text{is}} = 0$ dans Ω_{is} , donc

$$\Delta \varphi = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_{\text{is}}.$$

Enfin, les conditions aux limites $\mathbf{u}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$ et $\mathbf{u}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur Σ permettent de conclure que $\varphi = 0$ dans Ω_{is} . ■

Composante surfacique du terme d'ordre 0 dans le domaine conducteur

D'après (5.12) et (6.95), le terme $\mathcal{V}_0^{\text{cd}}$ est solution de l'équation différentielle ordinaire en Y_3

$$\begin{cases} \partial_3^2 \mathcal{V}_0^{\text{cd}}(., Y_3) + i\kappa^2 \mathcal{V}_0^{\text{cd}}(., Y_3) = 0 & \text{si } Y_3 \in I = (0, \infty) \\ \mathcal{V}_0^{\text{cd}}(., 0) = (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n}(., 0) \end{cases} \quad (6.108)$$

On rappelle que λ est défini par la relation (5.23).

Proposition 6.24 *Sous l'hypothèse (6.94), l'EDO (6.108) admet une unique solution $\mathcal{V}_0^{\text{cd}}$, donnée par la relation suivante*

$$\forall (y_\beta, Y_3) \in \Omega_0, \quad \mathcal{V}_0^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n}(y_\beta, 0) e^{-\lambda Y_3}. \quad (6.109)$$

Composante normale du terme d'ordre 1 dans le domaine conducteur

D'après (5.14), on a le résultat suivant.

Proposition 6.25 *Pour tout $(y_\beta, Y_3) \in \Omega_0$, on a*

$$v_1^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = \frac{1}{\lambda} \gamma_\alpha^\alpha ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n})(y_\beta, 0) e^{-\lambda Y_3}. \quad (6.110)$$

Remarque 6.26 *Ce résultat coïncide avec celui qu'on a obtenu lors de la reconstruction du champ magnétique via l'étude en champ électrique, voir la proposition 6.9. En effet, on a*

$$D_\alpha(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}})^\alpha = \gamma_\alpha^\alpha ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n}) \quad \text{sur} \quad \Sigma.$$

PREUVE. D'après (5.14),

$$v_1^{\text{cd}} = -i\kappa^{-2} \gamma_\alpha^\alpha (\partial_3(\mathbf{V}_0^{\text{cd}})) \quad \text{dans} \quad \Omega_0. \quad (6.111)$$

Or, d'après (6.109), il vient

$$\partial_3 \mathcal{V}_0^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = -\lambda (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n}(y_\beta, 0) e^{-\lambda Y_3} \quad (6.112)$$

et de plus

$$v_0^{\text{cd}} = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_0. \quad (6.113)$$

Donc,

$$v_1^{\text{cd}} = i\lambda\kappa^{-2}\gamma_\alpha^\alpha((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n})(y_\beta, 0) \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (6.114)$$

Enfin, $\kappa^{-2} = -i\lambda^{-2}$, de sorte qu'on a la relation suivante

$$v_1^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = \frac{1}{\lambda}\gamma_\alpha^\alpha((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n})(y_\beta, 0) e^{-\lambda Y_3}. \quad (6.115)$$

■

Terme d'ordre 1 dans le domaine isolant Ω_{is}

D'après la proposition 6.25, le terme \mathbf{H}_1^{is} vérifie la condition aux limites suivante à l'interface

$$\mathbf{H}_1^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\lambda}\gamma_\alpha^\alpha((\mathbf{n} \times \mathbf{H}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n}) \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.116)$$

De plus, d'après la relation (6.96), le terme \mathbf{H}_1^{is} vérifie aussi la condition aux limites suivante

$$\text{rot } \mathbf{H}_1^{\text{is}} \times \mathbf{n} = -i\partial_3 \mathcal{V}_0^{\text{cd}} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.117)$$

Donc, d'après (6.109), il vient

$$\text{rot } \mathbf{H}_1^{\text{is}} \times \mathbf{n} = i\lambda \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.118)$$

D'après la relation (6.99), le problème à résoudre pour le terme \mathbf{H}_1^{is} est le suivant

Trouver $\mathbf{H}_1^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\mathbf{N}}^{\partial\Omega}(\Omega_{\text{is}})$, avec $\mathbf{H}_1^{\text{is}} - \Psi_\Sigma^{\text{is}}(\mathbf{H}_1^{\text{cd}} \cdot \mathbf{n}) \in \mathbf{X}_{\mathbf{NT}}(\Omega_{\text{is}})$, tel que

$$\forall \mathbf{K} \in \mathbf{X}_{\mathbf{NT}}(\Omega_{\text{is}}), \int_{\Omega_{\text{is}}} (\text{rot } \mathbf{H}_1^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{K}} - \kappa^2 \mathbf{H}_1^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{K}}) d\mathbf{x} = i\lambda \int_{\Sigma} \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{K}}_\tau ds. \quad (6.119)$$

On rappelle que sous l'hypothèse spectrale 2.24, le terme $\mathbf{E}_1^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\mathbf{TN}}(\Omega_{\text{is}})$ est l'unique solution du problème (5.27).

Proposition 6.27 Soit $\mathbf{E}_1^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\mathbf{TN}}(\Omega_{\text{is}})$ la solution du problème (5.27). Alors,

$$\mathbf{H}_1^{\text{is}} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}_1^{\text{is}} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}} \quad (6.120)$$

est l'unique solution du problème (6.119).

La démonstration de la proposition 6.27 est similaire à celle de la proposition 6.23.

Composante surfacique du terme d'ordre 1 dans le domaine conducteur

D'après (5.12) et (6.95), pour tout $y_\beta \in \Sigma$, le terme $\mathcal{V}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(y_\beta, \cdot)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire en Y_3

$$\begin{cases} \partial_3^2 \mathcal{V}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) + i\kappa^2 \mathcal{V}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) &= -2b_\alpha^\beta \partial_3 \mathcal{V}_{\beta,0}^{\text{cd}} + b_\beta^\beta \partial_3 \mathcal{V}_{\alpha,0}^{\text{cd}} & \text{si } Y_3 \in I = (0, \infty) \\ \mathcal{V}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(y_\beta, 0) &= ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_1^{\text{is}}) \times \mathbf{n})_\alpha(y_\beta, 0) \end{cases} \quad (6.121)$$

Remarque 6.28 On a utilisé ici le fait que $v_0^{\text{cd}} = 0$ dans Ω_{cd} pour calculer le second membre de l'EDO.

Proposition 6.29 Sous la condition (6.94), l'EDO (6.121) admet une unique solution $\mathcal{V}_{\alpha,1}^{\text{cd}}$ satisfaisant

$$\forall (y_\beta, Y_3) \in \Omega_0, \quad \mathcal{V}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = [A_{\alpha,1}^0(y_\beta) + Y_3 A_{\alpha,1}^1(y_\beta)] e^{-\lambda Y_3} \quad (6.122)$$

où

$$\begin{cases} A_{\alpha,1}^0(y_\beta) = ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_1^{\text{is}}) \times \mathbf{n})_\alpha(y_\beta, 0) \\ A_{\alpha,1}^1(y_\beta) = \left(\frac{1}{2} b_\sigma^\sigma ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n})_\alpha - b_\alpha^\sigma ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n})_\sigma \right)(y_\beta, 0) \end{cases} \quad (6.123)$$

PREUVE. On commence par calculer le second membre de l'EDO (6.121). D'après la relation (6.109), il vient

$$\partial_3 \mathcal{V}_{\beta,0}^{\text{cd}} = -\lambda ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n})_\beta e^{-\lambda Y_3}. \quad (6.124)$$

On en déduit la relation suivante

$$-2b_\alpha^\beta \partial_3 \mathcal{V}_{\beta,0}^{\text{cd}} + b_\beta^\beta \partial_3 \mathcal{V}_{\alpha,0}^{\text{cd}} = \lambda \left[2b_\alpha^\beta ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n})_\beta - b_\beta^\beta ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n})_\alpha \right] e^{-\lambda Y_3} \quad (6.125)$$

Le terme général de l'ensemble des solutions de l'EDO (6.121) satisfaisant l'hypothèse (6.94) s'écrit

$$\mathcal{V}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = [A_{\alpha,1}^0(y_\beta) + Y_3 A_{\alpha,1}^1(y_\beta)] e^{-\lambda Y_3}.$$

Analysons l'ensemble de ces solutions. On a

$$\partial_3 \mathcal{V}_{\alpha,1}^{\text{cd}} = [-\lambda (A_{\alpha,1}^0 + Y_3 A_{\alpha,1}^1) + A_{\alpha,1}^1] e^{-\lambda Y_3} \quad (6.126)$$

puis,

$$\partial_3^2 \mathcal{V}_{\alpha,1}^{\text{cd}} = [\lambda^2 (A_{\alpha,1}^0 + Y_3 A_{\alpha,1}^1) - 2\lambda A_{\alpha,1}^1] e^{-\lambda Y_3}. \quad (6.127)$$

Donc,

$$\partial_3^2 \mathcal{V}_{\alpha,1}^{\text{cd}} - \lambda^2 \mathcal{V}_{\alpha,1}^{\text{cd}} = -2\lambda A_{\alpha,1}^1 e^{-\lambda Y_3}. \quad (6.128)$$

Ainsi, si $\mathcal{V}_{\alpha,1}^{\text{cd}}$ est solution de (6.121), alors d'après la condition initiale (6.121)₂ de l'EDO et (6.125), il vient

$$\begin{cases} A_{\alpha,1}^0(y_\beta) = ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_1^{\text{is}}) \times \mathbf{n})_\alpha(y_\beta, 0) \\ -2\lambda A_{\alpha,1}^1 = \lambda \left[2b_\alpha^\beta ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n})_\beta - b_\beta^\beta ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n})_\alpha \right] \end{cases} \quad (6.129)$$

On en déduit les relations (6.123). ■

Remarque 6.30 Ce résultat coïncide avec celui de la proposition 6.15. En effet, d'après la remarque 6.14, on a $((\mathbf{n} \times \mathbf{H}_j^{\text{is}}) \times \mathbf{n})_\alpha = \mathcal{H}_{\alpha,j}^{\text{is}}$ pour $j = 0, 1$.

Composante normale du terme d'ordre $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ dans le domaine conducteur

D'après (5.14), il vient $v_j^{\text{cd}} = -i\kappa^{-2} \sum_{k=0}^{j-1} L_3^{j-k}(\mathbf{V}_k^{\text{cd}})$ dans Ω_0 .

Terme d'ordre $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ dans le domaine isolant

Le terme \mathbf{H}_j^{is} vérifie la condition aux limites suivante à l'interface

$$\mathbf{H}_j^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} = -i\kappa^{-2} \sum_{k=0}^{j-1} L_3^{j-k}(\mathbf{V}_k^{\text{cd}})(y_\beta, 0) \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.130)$$

De plus, d'après la relation (6.96), on a

$$\text{rot } \mathbf{H}_j^{\text{is}} \times \mathbf{n} = \sum_{k=1}^j \mathbf{T}_k \mathbf{V}_{j-k}^{\text{cd}} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.131)$$

En particulier, le terme \mathbf{H}_2^{is} vérifie la condition aux limites

$$\text{rot } \mathbf{H}_2^{\text{is}} \times \mathbf{n} = -i\partial_3 \mathcal{V}_1^{\text{cd}} \quad \text{sur } \Sigma.$$

et d'après la proposition 6.29, il vient

$$\text{rot } \mathbf{H}_2^{\text{is}} \times \mathbf{n} = i\lambda \mathbf{H}_{\tau,1}^{\text{is}} - i \left(\frac{1}{2} b_\sigma^\sigma \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}} - b_\alpha^\sigma (\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}})_\sigma dy^\alpha \right) \quad \text{sur } \Sigma. \quad (6.132)$$

D'après la relation (6.99), le problème à résoudre pour le terme \mathbf{H}_j^{is} est le suivant

Trouver $\mathbf{H}_j^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\mathbf{N}}^{\partial\Omega}(\Omega_{\text{is}})$, avec $\mathbf{H}_j^{\text{is}} - \Psi_\Sigma^{\text{is}}(\mathbf{H}_j^{\text{cd}} \cdot \mathbf{n}) \in \mathbf{X}_{\mathbf{NT}}(\Omega_{\text{is}})$, tel que

$$\forall \mathbf{K} \in \mathbf{X}_{\mathbf{NT}}(\Omega_{\text{is}}), \int_{\Omega_{\text{is}}} (\text{rot } \mathbf{H}_j^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{K}} - \kappa^2 \mathbf{H}_j^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{K}}) d\mathbf{x} = \sum_{k=1}^j \int_\Sigma \mathbf{T}_k \mathbf{V}_{j-k}^{\text{cd}} \bar{\mathbf{K}}_\tau ds. \quad (6.133)$$

On rappelle que sous l'hypothèse spectrale 2.24, le terme $\mathbf{E}_j^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\mathbf{TN}}(\Omega_{\text{is}})$ est l'unique solution du problème (5.48).

Proposition 6.31 Soit $\mathbf{E}_j^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\mathbf{TN}}(\Omega_{\text{is}})$ la solution du problème (5.48). Alors,

$$\mathbf{H}_j^{\text{is}} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}_j^{\text{is}} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}}$$

est l'unique solution du problème (6.133).

La démonstration de la proposition 6.31 est similaire à celle de la proposition 6.23.

Composante surfacique du terme d'ordre j dans le domaine conducteur

D'après (5.12) et (6.95), pour tout $y_\beta \in \Sigma$, $\mathcal{V}_{\alpha,1}^{\text{cd}}(y_\beta, \cdot)$ est solution de l'équation différentielle ordinaire en Y_3

$$\begin{cases} \partial_3^2 \mathcal{V}_{\alpha,j}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) + i\kappa^2 \mathcal{V}_{\alpha,j}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = \sum_{k=0}^{j-1} L_\alpha^{j-k}(\mathbf{V}_k^{\text{cd}})(y_\beta, Y_3) & \text{pour } Y_3 \in (0, \infty) \\ \mathcal{V}_{\alpha,j}^{\text{cd}}(y_\beta, 0) = ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_j^{\text{is}}) \times \mathbf{n})_\alpha(y_\beta, 0) \end{cases} \quad (6.134)$$

Dans la proposition suivante, on explicite la structure générale des solutions de l'EDO (6.134), voir la proposition 5.10 pour un résultat similaire relatif au développement asymptotique en champ électrique.

Proposition 6.32 *Soit $j \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Sous l'hypothèse (5.11), l'EDO (6.134) admet une unique solution $\mathcal{V}_{\alpha,j}^{\text{cd}}$. De plus, il existe des fonctions $A_{\alpha,j}^k$ définies sur Σ pour tout $k \leq j$, telles que pour tout $(y_\beta, Y_3) \in \Omega_0$, on a*

$$\mathcal{V}_{\alpha,j}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = [A_{\alpha,j}^0(y_\beta) + Y_3 A_{\alpha,j}^1(y_\beta) + \cdots + Y_3^j A_{\alpha,j}^j(y_\beta)] e^{-\lambda Y_3}. \quad (6.135)$$

De plus, on a

$$A_{\alpha,j}^0(y_\beta) = ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_j^{\text{is}}) \times \mathbf{n})_\alpha(y_\beta, 0). \quad (6.136)$$

Le processus ci-dessus fournit le développement asymptotique de \mathbf{H}_δ dans les sous-domaines Ω_{is} et Ω_{cd} . Dans le paragraphe suivant, on récapitule les différents termes du développement asymptotique du champ magnétique. En particulier, on explicite les termes d'ordre 0 et 1 du développement dans le domaine conducteur.

6.5 Comparaison et synthèse des développements

Dans cette partie, on compare le développement en champ magnétique obtenu au paragraphe 6.4 avec celui calculé à la section 6.3. Les calculs effectués pour les termes d'ordre 0 et 1 au paragraphe précédent, voir les propositions 6.24 et 6.29, coïncident avec ceux de la proposition 6.9, obtenu au paragraphe 6.3. On rappelle que la donnée $\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s-2}(\Omega)$, où $s \geq 2$, est à support dans Ω_{is} et vérifie $\text{div } \mathbf{F} = 0$ dans Ω . Sous l'hypothèse spectrale 2.24, les termes \mathbf{H}_j^{is} et \mathbf{H}_j^{cd} du développement asymptotique sont définis de façon unique. On a

$$\mathbf{H}_\delta^{\text{is}} \simeq \mathbf{H}_0^{\text{is}} + \delta \mathbf{H}_1^{\text{is}} + \delta^2 \mathbf{H}_2^{\text{is}} + \cdots \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}},$$

$$\mathbf{H}_\delta^{\text{cd}}(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{H}_0^{\text{cd}}(\mathbf{x}; \delta) + \delta \mathbf{H}_1^{\text{cd}}(\mathbf{x}; \delta) + \delta^2 \mathbf{H}_2^{\text{cd}}(\mathbf{x}; \delta) + \cdots \quad \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_{\text{cd}}$$

et donc

$$\mathbf{H}_\delta^{\text{cd}}(\mathbf{x}) \simeq \mathbf{V}_0^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{h}{\delta}) + \delta \mathbf{V}_1^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{h}{\delta}) + \delta^2 \mathbf{V}_2^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{h}{\delta}) + \dots \quad \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O}$$

où

$$\mathbf{V}_j^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = \mathcal{V}_{\alpha,j}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) dy^\alpha + v_j^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) \mathbf{n}.$$

Pour tout $j \geq 0$, les termes v_j^{cd} , \mathbf{H}_j^{is} et $\mathcal{V}_j^{\text{cd}}$ sont déterminés successivement. Le terme $\mathbf{H}_0^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\text{NT}}(\Omega_{\text{is}}) \cap \mathbf{H}^{s-1}(\Omega_{\text{is}})$ est l'unique solution du problème (6.102) et $\mathbf{H}_j^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\text{T}}^{\partial\Omega}(\Omega_{\text{is}}) \cap \mathbf{H}^{s-j-1}(\Omega_{\text{is}})$ est l'unique solution du problème (6.133) pour $j \geq 1$. Le terme $\mathbf{H}_0^{\text{is}} \in \mathbf{H}^{s-1}(\Omega_{\text{is}})$ satisfait les équations aux dérivées partielles (EDP) suivantes au sens des distributions

$$\begin{cases} \text{rot rot } \mathbf{H}_0^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{H}_0^{\text{is}} &= -\frac{1}{i\kappa} \text{rot } \mathbf{F}^{\text{is}} & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \text{rot } \mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \Sigma \\ \mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De plus, on a

$$\mathbf{H}_0^{\text{is}} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}}$$

où $\mathbf{E}_0^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$ est la solution du problème (5.20). Le terme $\mathbf{H}_1^{\text{is}} \in \mathbf{H}^{s-2}(\Omega_{\text{is}})$ satisfait les EDP suivantes au sens des distributions

$$\begin{cases} \text{rot rot } \mathbf{H}_1^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{H}_1^{\text{is}} &= 0 & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \text{rot } \mathbf{H}_1^{\text{is}} \times \mathbf{n} &= i\lambda \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}} & \text{sur } \Sigma \\ \mathbf{H}_1^{\text{is}} \times \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

De plus, on a

$$\mathbf{H}_1^{\text{is}} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{rot } \mathbf{E}_1^{\text{is}} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}}$$

où $\mathbf{E}_1^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\text{T}}^{\partial\Omega}(\Omega_{\text{is}})$ est la solution du problème (5.27). Pour tout $j \geq 2$, le terme $\mathbf{H}_j^{\text{is}} \in \mathbf{H}^{s-j-1}(\Omega_{\text{is}})$ satisfait

$$\mathbf{H}_j^{\text{is}} = \mathcal{Q}^{\text{is}} \circ \mathfrak{S}_j(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}|_\Sigma) \quad (6.137)$$

où l'opérateur \mathfrak{S}_j défini pour tout $j \geq 0$ par

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_j : \mathbf{H}^{s-\frac{3}{2}}(\Sigma) &\rightarrow \mathbf{H}^{s-j-\frac{5}{2}}(\Sigma) \\ \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}|_\Sigma &\mapsto \text{rot } \mathbf{H}_j^{\text{is}} \times \mathbf{n}|_\Sigma \end{aligned}$$

est un opérateur tangentiel et \mathcal{Q}^{is} est l'opérateur défini par

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}^{\text{is}} : \mathbf{H}^{s-j-\frac{3}{2}}(\Sigma) &\rightarrow \{\mathbf{H} \in \mathbf{H}^{s-j-1}(\Omega_{\text{is}}) \mid \text{div } \mathbf{H} = 0\} \\ \mathbf{G} &\mapsto \mathbf{H} \end{aligned}$$

où \mathbf{H} est l'unique solution au sens des distributions des EDP suivantes

$$\begin{cases} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{H}^{\text{is}} &= 0 & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}^{\text{is}} \times \mathbf{n} &= \mathbf{G} & \text{sur } \Sigma \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}^{\text{is}} \times \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

En particulier, d'après (6.101), (6.118) et (6.132) on a respectivement sur l'interface Σ

$$\begin{cases} \mathfrak{S}_0(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}) = 0 \\ \mathfrak{S}_1(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}) = i\lambda \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}} \\ \mathfrak{S}_2(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}) = i\lambda \left(\mathcal{Q}^{\text{is}}(\mathfrak{S}_1(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}), \mathfrak{N}_1(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}})) \right)_{\tau} - i \left(\frac{1}{2} b_{\sigma}^{\sigma} \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}} - b_{\alpha}^{\sigma} (\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}})_{\sigma} dy^{\alpha} \right) \end{cases}$$

De plus, on a

$$\mathbf{H}_j^{\text{is}} = \frac{1}{i\omega\mu_0} \operatorname{rot} \mathbf{E}_j^{\text{is}} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}}$$

où $\mathbf{E}_j^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\Gamma}^{\partial\Omega}(\Omega_{\text{is}})$ est la solution du problème (5.48). On justifie à présent que l'opérateur \mathfrak{S}_j est bien défini pour tout $j \in \mathbb{N}$. On suppose que pour tout $l \leq j$, on a

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_l^{\text{is}} \times \mathbf{n}|_{\Sigma} = \mathfrak{S}_l(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}|_{\Sigma})$$

On a

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_{j+1}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = \sum_{k=0}^j \mathbf{T}_{j+1-k} \mathbf{V}_k^{\text{cd}} \quad \text{sur } \Sigma$$

Les membres de droite de ces relations s'expriment en fonction des termes \mathbf{V}_k^{cd} pour $k \leq j$. De plus, il existe des opérateurs ϕ_k , pour $k \in \{0, j\}$ tels que

$$\mathbf{V}_0^{\text{cd}} = \phi_0(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}|_{\Sigma})$$

et pour tout $k \geq 1$,

$$\mathbf{V}_k^{\text{cd}} = \phi_k(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}|_{\Sigma}, \mathbf{H}_1^{\text{is}}, \dots, \mathbf{H}_k^{\text{is}})$$

voir plus-bas pour la structure des termes \mathbf{V}_k^{cd} . Or, par hypothèse de récurrence et d'après la relation (6.137), on a

$$\forall m \geq 1, \quad \mathbf{H}_m^{\text{is}} = \mathcal{Q}^{\text{is}} \circ \mathfrak{S}_m(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}|_{\Sigma}).$$

Ainsi, l'opérateur \mathfrak{S}_{j+1} défini par

$$\mathfrak{S}_{j+1}(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}) = \sum_{k=0}^j \mathbf{T}_{j+1-k} \phi_k \left(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}|_{\Sigma}, \mathcal{Q}^{\text{is}}(\mathfrak{S}_1(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}), \mathfrak{N}_1(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}})), \dots, \mathcal{Q}^{\text{is}}(\mathfrak{S}_k(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}), \mathfrak{N}_k(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}})) \right)$$

sur Σ , satisfait la relation

$$\text{rot } \mathbf{H}_{j+1}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = \mathfrak{S}_{j+1}(\mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}) \quad \text{sur } \Sigma$$

ce qui prouve que \mathfrak{S}_j est bien défini pour tout $j \in \mathbb{N}$.

On a explicité les deux premiers termes \mathbf{V}_0^{cd} et \mathbf{V}_1^{cd} . Pour tout $Y_3 \geq 0$, on a

$$\mathbf{V}_0^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = (\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n}(y_\beta, 0) e^{-\lambda Y_3}$$

et

$$\mathbf{V}_1^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = \left([A_{\alpha,1}^0(y_\beta) + Y_3 A_{\alpha,1}^1(y_\beta)] dy^\alpha + \frac{1}{\lambda} \gamma_\alpha^\alpha ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n})(y_\beta, 0) \right) e^{-\lambda Y_3}$$

où

$$\begin{cases} A_{\alpha,1}^0(y_\beta) = ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_1^{\text{is}}) \times \mathbf{n})_\alpha(y_\beta, 0) \\ A_{\alpha,1}^1(y_\beta) = \left(\frac{1}{2} b_\sigma^\sigma ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n})_\alpha - b_\alpha^\sigma ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_0^{\text{is}}) \times \mathbf{n})_\sigma \right)(y_\beta, 0) \end{cases}$$

Ainsi, la courbure de la variété Σ apparait dans le développement en champ magnétique dès l'ordre 1. Enfin, pour tout $j \geq 2$, les termes $\mathbf{V}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3)$ admettent la décomposition

$$\mathbf{V}_j^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = \mathcal{V}_{\alpha,j}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) dy^\alpha + v_j^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) \mathbf{n} \quad \text{pour tout } Y_3 \geq 0,$$

où les termes $\mathcal{V}_{\alpha,j}^{\text{cd}}$ et v_j^{cd} ont la structure suivante

$$\mathcal{V}_{\alpha,j}^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = \left[A_{\alpha,j}^0(y_\beta) + Y_3 A_{\alpha,j}^1(y_\beta) + \cdots + Y_3^j A_{\alpha,j}^j(y_\beta) \right] e^{-\lambda Y_3}$$

et

$$v_j^{\text{cd}}(y_\beta, Y_3) = \left[d_j^0(y_\beta) + Y_3 d_j^1(y_\beta) + \cdots + Y_3^{j-1} d_j^{j-1}(y_\beta) \right] e^{-\lambda Y_3}.$$

En particulier, on a

$$A_{\alpha,j}^0(y_\beta) = ((\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{H}}_j^{\text{is}}) \times \mathbf{n})_\alpha(y_\beta, 0).$$

Chapitre 7

Convergence du développement asymptotique

7.1 Introduction

Dans ce septième chapitre, on étudie la convergence des développements asymptotiques multi-échelles du champ électrique \mathbf{E}_δ et du champ magnétique \mathbf{H}_δ . Les restes d'ordre m du champ électrique sont définis en otant à \mathbf{E}_δ les $m + 1$ premiers termes du développement en champ électrique. A partir des estimations a priori uniformes en δ démontrées au chapitre 2, on obtient des estimations en puissances de δ de ces restes. Ces estimations valident le développement asymptotique en champ électrique effectué au chapitre 5, ainsi que le développement asymptotique en champ magnétique calculé au chapitre 6.

Le plan de ce chapitre est le suivant. On rappelle le problème étudié pour le champ électrique et on calcule les relations naturelles vérifiées par les restes du développement asymptotique au paragraphe 7.2, voir la proposition 7.4 pour un résultat précis. On démontre des estimations des restes en puissances de δ au paragraphe suivant, voir le théorème 7.9 pour un résultat précis. On en déduit des estimations optimales des restes, uniformes en δ .

7.2 Etude des restes

7.2.1 Cadre d'étude

Dans ce chapitre, on considère une donnée $\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s-2}(\Omega)$, où $s \geq 2$, à support dans Ω_{is} telle que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ dans Ω . On note $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta)$ une solution des équations

suivantes au sens des distributions

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta - \kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta = \mathbf{F} & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{E}_\delta \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7.1)$$

voir (5.5) et (5.6). Puisque $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ et $\kappa \neq 0$, on en déduit que $\operatorname{div} \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta = 0$ et donc \mathbf{E}_δ vérifie

$$-\Delta \mathbf{E}_\delta - \kappa^2 \mu \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta = \mu \mathbf{F} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}} \cup \Omega_{\text{cd}}$$

ainsi que les conditions de transmission suivantes

$$\begin{aligned} [\varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta \cdot \mathbf{n}]_\Sigma &= 0 & \text{et} & & [\operatorname{div} \varepsilon(\delta) \mathbf{E}_\delta]_\Sigma &= 0 \\ [\mathbf{E}_\delta \times \mathbf{n}]_\Sigma &= 0 & & & [\operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta \times \mathbf{n}]_\Sigma &= 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

Des calculs similaires à ceux effectués dans [16, Proposition 2.1] impliquent que l'ensemble des conditions de transmission ci-dessus et les conditions au bord recouvrent le Laplacien dans Ω_{is} et Ω_{cd} , au sens de [40, Définition 1.5 p.125]. On en déduit le résultat suivant de régularité elliptique par morceaux de \mathbf{E}_δ :

$$\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{PH}^s(\Omega),$$

où $\mathbf{PH}^s(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions vectorielles \mathbf{H}^s par sous-domaines. On rappelle que la première équation dans (7.1) s'écrit en coordonnées normales (y_α, Y_3)

$$\delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{R}^n(\mathbf{W}_\delta^{\text{cd}}) - \kappa^2 \left(1 + \frac{i}{\delta^2}\right) \mathbf{W}_\delta^{\text{cd}} = 0 \quad \text{dans } \Omega_\delta \quad (7.3)$$

voir (5.7), où

$$(y_\alpha, Y_3 = \frac{h}{\delta}) \in \Omega_\delta \quad \text{si et seulement si} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}$$

et

$$\mathbf{W}_\delta^{\text{cd}}(y_\alpha, Y_3) = \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}}(\mathbf{x}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O}.$$

De plus, d'après (5.8), la continuité de la trace tangentielle du rotationnel de \mathbf{E}_δ à travers l'interface Σ s'écrit en paramétrisation normale

$$\delta^{-1} \mathbf{B}^0(\mathbf{W}_\delta^{\text{cd}}) + \mathbf{B}^1(\mathbf{W}_\delta^{\text{cd}}) = \operatorname{rot} \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (7.4)$$

Enfin, on rappelle que la divergence de \mathbf{E}_δ est nulle dans le domaine Ω_{cd} , ce qui s'écrit de la façon suivante dans les coordonnées (y_α, Y_3) , voir (5.54)

$$\delta^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \operatorname{div}^n(\mathbf{W}_\delta^{\text{cd}}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_\delta. \quad (7.5)$$

La structure du développement asymptotique en champ électrique associé au problème (7.1) est résumé au paragraphe 5.3.5, voir la proposition 5.14. En particulier, sous l'hypothèse spectrale 2.24 sur κ , pour tout $j \in \llbracket 0, \lfloor s \rfloor - 2 \rrbracket$, où $s \geq 2$, les termes \mathbf{E}_j^{is} et \mathbf{W}_j^{cd} du développement sont bien définis et ont la régularité suivante :

$$\mathbf{E}_j^{\text{is}} \in \mathbf{H}^{s-j}(\Omega_{\text{is}}) \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_j^{\text{cd}} \in \mathbf{H}^{s-j-\frac{1}{2}}(\Sigma, \mathcal{C}^\infty(I)) . \quad (7.6)$$

Remarque 7.1 Pour tout $j \in \llbracket 0, \lfloor s \rfloor - 2 \rrbracket$ où $s \geq 2$, on a $s - j \geq 2$ et donc d'après (7.6), il vient

$$\mathbf{E}_j^{\text{is}} \in \mathbf{H}^2(\Omega_{\text{is}}) \quad \text{et} \quad \mathbf{W}_j^{\text{cd}} \in \mathbf{H}^{\frac{3}{2}}(\Sigma, \mathcal{C}^\infty(I)) . \quad (7.7)$$

7.2.2 Sommes partielles

A partir du développement asymptotique en champ électrique (5.9), on définit les sommes partielles associées. Pour tout $N \in \llbracket 0, \lfloor s \rfloor - 2 \rrbracket$, on pose

$$\mathbf{E}_{[N],\delta}^{\text{is}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^N \mathbf{E}_j^{\text{is}}(\mathbf{x}) \delta^j \quad \text{si} \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\text{is}}$$

et

$$\mathbf{E}_{[N],\delta}^{\text{cd}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=0}^N \mathbf{W}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{h}{\delta}) \delta^j \quad \text{si} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O} . \quad (7.8)$$

D'après (7.6), on a

$$\mathbf{E}_{[N],\delta}^{\text{is}} \in \mathbf{H}^{s-N}(\Omega_{\text{is}}) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_{[N],\delta}^{\text{cd}} \in \mathbf{H}^{s-N-\frac{1}{2}}(\mathcal{O}) . \quad (7.9)$$

Définition 7.2 Soient $s \geq 2$ et $\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s-2}(\Omega)$. Pour tout $N \in \llbracket 0, \lfloor s \rfloor - 2 \rrbracket$, on note $\mathbf{E}_{[N],\delta}$ l'approximation asymptotique d'ordre N de la solution \mathbf{E}_δ des équations (7.1)

$$\mathbf{E}_{[N],\delta}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \mathbf{E}_{[N],\delta}^{\text{is}}(\mathbf{x}) & \text{si} \quad \mathbf{x} \in \Omega_{\text{is}} \\ \mathbf{E}_{[N],\delta}^{\text{cd}}(\mathbf{x}) & \text{si} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O} \end{cases} \quad (7.10)$$

Dans ce chapitre, on compare $\mathbf{E}_{[N],\delta}$ dans $\Omega_{\text{is}} \cup \Sigma \cup \mathcal{O}$ à la solution forte \mathbf{E}_δ des équations (7.1). On commence par prolonger $\mathbf{E}_{[N],\delta}$ au domaine Ω_{cd} avec une fonction de troncature $\chi \in \mathcal{C}^\infty(\Omega_{\text{cd}})$ telle que $\chi = 1$ dans un voisinage tubulaire \mathcal{O}' de Σ , où $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$, et $\chi = 0$ dans $\Omega_{\text{cd}} \setminus \mathcal{O}$, voir la Figure 1 ci-dessous.

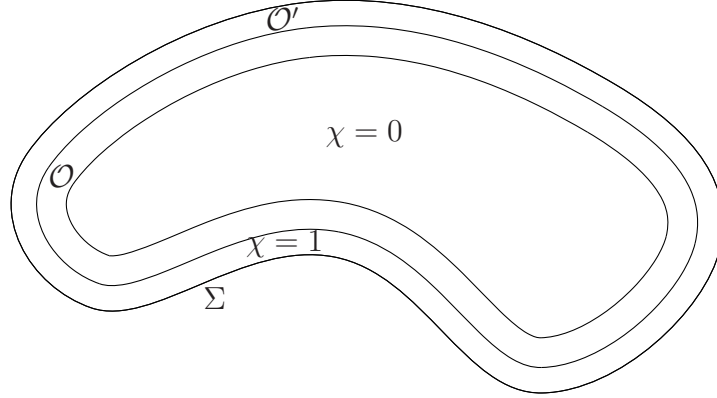


Figure 1 – Un voisinage tubulaire $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$ de Σ dans Ω_{cd}

On pose

$$\tilde{\mathbf{E}}_{[N],\delta} = \begin{cases} \mathbf{E}_{[N],\delta}^{\text{is}} & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \chi \mathbf{E}_{[N],\delta}^{\text{cd}} & \text{dans } \mathcal{O} \\ 0 & \text{dans } \Omega_{\text{cd}} \setminus \mathcal{O} \end{cases} \quad (7.11)$$

En particulier, on a

$$\tilde{\mathbf{E}}_{[N],\delta} = \mathbf{E}_{[N],\delta} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}} \cup \mathcal{O}'. \quad (7.12)$$

D'après (7.9), on a

$$\tilde{\mathbf{E}}_{[N],\delta}^{\text{is}} \in \mathbf{H}^{s-N}(\Omega_{\text{is}}) \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbf{E}}_{[N],\delta}^{\text{cd}} \in \mathbf{H}^{s-N-\frac{1}{2}}(\Omega_{\text{cd}}). \quad (7.13)$$

7.2.3 Etude des restes

On rappelle que $\mathbf{E}_\delta \in \mathbf{X}_\Gamma(\Omega, \delta) \cap \mathbf{PH}^s(\Omega)$ désigne une solution forte des équations (7.1) associée à une donnée $\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s-2}(\Omega)$ où $s \geq 2$.

Définition 7.3 Pour tout $m \in \llbracket 0, \lfloor s \rfloor - 2 \rrbracket$, on note $\mathbf{R}_{m,\delta} = \mathbf{E}_\delta - \tilde{\mathbf{E}}_{[m],\delta}$ le reste d'ordre m , où $\tilde{\mathbf{E}}_{[m],\delta}$ est défini par sous-domaines par les relations (7.11).

Par définition, et d'après la relation (7.12), il vient

$$\begin{cases} \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} = \mathbf{E}_\delta^{\text{is}} - \mathbf{E}_{[m],\delta}^{\text{is}} & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} = \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}} - \mathbf{E}_{[m],\delta}^{\text{cd}} & \text{dans } \mathcal{O}' \\ \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} = \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}} & \text{dans } \Omega_{\text{cd}} \setminus \mathcal{O} \end{cases} \quad (7.14)$$

De plus, d'après (7.13), on a

$$\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} \in \mathbf{H}^{s-m}(\Omega_{\text{is}}) \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} \in \mathbf{H}^{s-m-\frac{1}{2}}(\Omega_{\text{cd}}). \quad (7.15)$$

Les restes $\mathbf{R}_{m,\delta}$ vérifient des relations naturelles, précisées dans la proposition 7.4 ci-dessous. On introduit préalablement l'opérateur \mathcal{R}_N , pour $N \in \mathbb{N}$, défini par la relation

$$\mathcal{R}_N(y_\beta, Y_3; \delta; \partial_\beta, \partial_3) := \sum_{p+q \leq 2} b_{N,p,q}(y_\beta, Y_3; \delta) \partial_\beta^p \partial_{Y_3}^q \quad \text{où} \quad \|b_{N,p,q}(\cdot, \cdot; \delta)\|_{\infty, \Sigma \times I} \leq c_N \delta^{N+1}$$

de telle sorte que

$$\delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{L}^n = \delta^{-2} \sum_{n=0}^N \delta^n \mathbf{L}^n + \delta^{-2} \mathcal{R}_N(y_\beta, Y_3; \delta; \partial_\beta, \partial_3). \quad (7.16)$$

Proposition 7.4 *Sous l'hypothèse spectrale 2.24, pour tout $m \in \llbracket 0, \lfloor s \rfloor - 2 \rrbracket$, on a*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{rot rot } \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} = 0 & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{L}^n (\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}}) = \delta^{m-1} \mathbf{L}^0 \mathbf{W}_{m+1}^{\text{cd}} \\ \quad - \delta^m \sum_{k=2}^m \delta^{k-2} \sum_{j=k}^m \mathbf{L}^j (\mathbf{W}_{m-j+k}^{\text{cd}}) - \sum_{k=1}^m \delta^{k-2} \mathcal{R}_m \mathbf{W}_k^{\text{cd}} & \text{dans } \mathcal{O}' \\ \delta^{-1} \sum_{n=0}^1 \delta^n \mathbf{B}^n (\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}}) = \text{rot } \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} + \delta^m \mathbf{B}^0 \mathbf{W}_{m+1}^{\text{cd}} & \text{sur } \Sigma \\ \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} \times \mathbf{n} = \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \\ \text{rot } \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (7.17)$$

De plus,

$$\text{div}[\delta] \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} = -\delta^{m+1} \sum_{k=0}^m \text{div}^{m+1-k} \mathbf{W}_k^{\text{cd}} + O(\delta^{m+2}) \quad \text{dans } \mathcal{O}' \quad (7.18)$$

et sur Σ , on a

$$\varepsilon(\delta)^{\text{cd}} \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} \cdot \mathbf{n} = \varepsilon(\delta)^{\text{is}} \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} - \varepsilon(\delta)^{\text{is}} \delta^{m-1} \sum_{k=0}^1 (w_{m-k}^{\text{cd}} - \tilde{\mathbf{E}}_{m-k}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n}) \delta^{1-k}. \quad (7.19)$$

PREUVE. D'après (5.20), $\mathbf{E}_0^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$ vérifie pour tout $\mathbf{E}' \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$

$$\int_{\Omega_{\text{is}}} \frac{1}{\mu} (\text{rot } \mathbf{E}_0^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \mathbf{E}_0^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{E}}') \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_{\text{is}}} \mathbf{F}^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{E}}' \, d\mathbf{x}, \quad (7.20)$$

et pour tout $j \geq 1$, $\mathbf{E}_j^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\text{T}}^{\partial\Omega}(\Omega_{\text{is}})$ vérifie $\mathbf{E}_j^{\text{is}} - \Phi_{\Sigma}^{\text{is}}(\mathbf{E}_j^{\text{cd}} \times \mathbf{n}) \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}})$ et

$$\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{X}_{\text{TN}}(\Omega_{\text{is}}), \int_{\Omega_{\text{is}}} (\text{rot } \mathbf{E}_j^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \mathbf{E}_j^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{E}}') \, d\mathbf{x} = 0. \quad (7.21)$$

Ainsi, $\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} \in \mathbf{X}_{\mathbf{T}}^{\partial\Omega}(\Omega_{\text{is}})$ vérifie $\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} - \Phi_{\Sigma}^{\text{is}}(\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} \times \mathbf{n}) \in \mathbf{X}_{\mathbf{TN}}(\Omega_{\text{is}})$ et

$$\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{X}_{\mathbf{TN}}(\Omega_{\text{is}}), \int_{\Omega_{\text{is}}} (\text{rot } \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} \cdot \bar{\mathbf{E}}') \, d\mathbf{x} = 0. \quad (7.22)$$

Par une intégration par parties dans la relation (7.22), il vient

$$\begin{cases} \text{rot rot } \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} &= 0 & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} &= \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \\ \text{rot } \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.23)$$

On démontre à présent la relation (7.17)₂ : d'après (7.3), on a

$$\delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{L}^n \mathbf{W}_{\delta}^{\text{cd}}(y_{\alpha}, Y_3) = 0 \quad \text{si } (y_{\alpha}, Y_3) \in \Omega_{\delta}.$$

Donc,

$$\delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{L}^n (\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}}) = - \sum_{k=0}^m \delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^{n+k} \mathbf{L}^n (\mathbf{W}_k^{\text{cd}}) \quad \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O}'. \quad (7.24)$$

Ainsi, d'après (7.16), il vient

$$\delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{L}^n (\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}}) = - \sum_{k=0}^m \delta^{-2} \sum_{n=0}^N \delta^{n+k} \mathbf{L}^n (\mathbf{W}_k^{\text{cd}}) - \sum_{k=0}^m \delta^{k-2} \mathcal{R}_N \mathbf{W}_k^{\text{cd}} \quad \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{O}'. \quad (7.25)$$

On pose $N = m$. Par construction des termes du développement asymptotique, on a

$$\forall j \in \llbracket 0, \lfloor s \rfloor - 2 \rrbracket, \quad \sum_{l=0}^j \mathbf{L}^{j-l} (\mathbf{W}_l^{\text{cd}}) = 0 \quad \text{dans } \Omega_0. \quad (7.26)$$

Ainsi, les termes de la première somme du membre de droite dans (7.25) qui sont des facteurs de δ^j , pour $j \leq m - 2$, s'annulent :

$$\sum_{k=0}^m \delta^{-2} \sum_{n=0}^N \delta^{n+k} \mathbf{L}^n (\mathbf{W}_k^{\text{cd}}) = \delta^{-2} \sum_{k=1}^m \delta^{m+k} \sum_{j=k}^m \mathbf{L}^j (\mathbf{W}_{m-j+k}^{\text{cd}}) \quad (7.27)$$

de sorte que

$$\sum_{k=0}^m \delta^{-2} \sum_{n=0}^N \delta^{n+k} \mathbf{L}^n (\mathbf{W}_k^{\text{cd}}) = \delta^{m-1} \sum_{j=1}^m \mathbf{L}^j (\mathbf{W}_{m-j+1}^{\text{cd}}) + \delta^m \sum_{k=2}^m \delta^{k-2} \sum_{j=k}^m \mathbf{L}^j (\mathbf{W}_{m-j+k}^{\text{cd}}) \quad (7.28)$$

soit encore, d'après (7.26), il vient

$$\sum_{k=0}^m \delta^{-2} \sum_{n=0}^N \delta^{n+k} \mathbf{L}^n(\mathbf{W}_k^{\text{cd}}) = -\delta^{m-1} \mathbf{L}^0 \mathbf{W}_{m+1}^{\text{cd}} + \delta^m \sum_{k=2}^m \delta^{k-2} \sum_{j=k}^m \mathbf{L}^j(\mathbf{W}_{m-j+k}^{\text{cd}}). \quad (7.29)$$

De plus, $\mathbf{W}_0^{\text{cd}} = 0$, donc

$$-\sum_{k=0}^m \delta^{k-2} \mathcal{R}_m \mathbf{W}_k^{\text{cd}} = -\sum_{k=1}^m \delta^{k-2} \mathcal{R}_m \mathbf{W}_k^{\text{cd}}. \quad (7.30)$$

Par suite, on a la relation suivante dans \mathcal{O}'

$$\delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{L}^n(\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}}) = \delta^{m-1} \mathbf{L}^0 \mathbf{W}_{m+1}^{\text{cd}} - \delta^m \sum_{k=2}^m \delta^{k-2} \sum_{j=k}^m \mathbf{L}^j(\mathbf{W}_{m-j+k}^{\text{cd}}) - \sum_{k=1}^m \delta^{k-2} \mathcal{R}_m \mathbf{W}_k^{\text{cd}}. \quad (7.31)$$

On démontre à présent la relation suivante :

$$\delta^{-1} \sum_{n=0}^1 \delta^n \mathbf{B}^n(\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}}) = \text{rot } \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} + \delta^m \mathbf{B}^0 \mathbf{W}_{m+1}^{\text{cd}} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (7.32)$$

On a

$$\delta^{-1} \sum_{n=0}^1 \delta^n \mathbf{B}^n(\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}}) = \delta^{-1} \sum_{n=0}^1 \delta^n \mathbf{B}^n(\mathbf{W}_{\delta}^{\text{cd}}) - \delta^{-1} \sum_{k=0}^m \delta^k (\mathbf{B}^0 \mathbf{W}_k^{\text{cd}} + \delta \mathbf{B}^1 \mathbf{W}_k^{\text{cd}}) \quad (7.33)$$

et

$$\text{rot } \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = \text{rot } \mathbf{E}_{\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} - \sum_{k=0}^m \delta^k \text{rot } \mathbf{E}_k^{\text{is}} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (7.34)$$

Or, d'après (7.4), on a

$$\delta^{-1} \sum_{n=0}^1 \delta^n \mathbf{B}^n \mathbf{W}_{\delta}^{\text{cd}} = \text{rot } \mathbf{E}_{\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma$$

et par construction du développement asymptotique, pour $k = 2, \dots, m+1$, on a

$$\mathbf{B}^0 \mathbf{W}_k^{\text{cd}} + \mathbf{B}^1 \mathbf{W}_{k-1}^{\text{cd}} = \text{rot } \mathbf{E}_{k-1}^{\text{is}} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (7.35)$$

De plus, $w_1^{\text{cd}} = 0$, de sorte que

$$\mathbf{B}^0 \mathbf{W}_1^{\text{cd}} = \text{rot } \mathbf{E}_{\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} \quad \text{sur } \Sigma. \quad (7.36)$$

D'après (7.33) et (7.34), on en déduit la relation (7.32). La relation (7.19) est une conséquence des relations de compatibilités (5.60) sur la divergence. ■

Remarque 7.5 (i) D'après (4.76), il vient

$$\mathbf{L}^0 \mathbf{W}_{m+1}^{\text{cd}} = \begin{pmatrix} -\partial_3^2 \mathcal{W}_{m+1}^{\text{cd}} - i\kappa^2 \mathcal{W}_{m+1}^{\text{cd}} \\ -i\kappa^2 w_{m+1}^{\text{cd}} \end{pmatrix}$$

donc, d'après (7.6), on a

$$\mathbf{L}^0 \mathbf{W}_{m+1}^{\text{cd}} \in \mathbf{H}^{s-m-\frac{3}{2}}(\Sigma, \mathcal{C}^\infty(I)) \subset \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma, \mathcal{C}^\infty(I)) \quad (7.37)$$

car $s - m \geq 2$.

(ii) De même, d'après (4.30), on a

$$\mathbf{B}^0 \mathbf{W}_{m+1}^{\text{cd}} = \partial_3 \mathcal{W}_{m+1}^{\text{cd}} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma). \quad (7.38)$$

Remarque 7.6 Le terme $\delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{L}^n(\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}})$ satisfait aussi une relation similaire à (7.17)₂ en $O(\delta^{m-1})$ dans $\mathcal{O} \setminus \mathcal{O}'$. En effet, $\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} = \mathbf{E}_\delta^{\text{cd}} - \chi \mathbf{E}_{[m],\delta}^{\text{cd}}$ dans \mathcal{O} de sorte que

$$\delta^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n \mathbf{L}^n(\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}}) = -\mathbf{L}[\delta](\chi \mathbf{E}_{[m],\delta}^{\text{cd}}) \quad \text{dans } \mathcal{O}.$$

De plus, les termes \mathbf{W}_k^{cd} sont des exponentielles décroissantes en Y_3 dans Ω_0 , et donc par linéarité $\mathbf{E}_{[m],\delta}^{\text{cd}}$ aussi. Par suite, $\mathbf{L}[\delta](\chi \mathbf{E}_{[m],\delta}^{\text{cd}}) = O(\delta^{m-1})$ dans \mathcal{O} .

7.3 Estimations des restes

Dans cette dernière section, on présente et on démontre des estimations des restes $\mathbf{R}_{m,\delta}$ (voir la définition 7.3) du développement asymptotique en puissances de δ . Le point crucial de la démonstration est l'estimation a priori (2.32) du chapitre 2 uniforme en δ .

7.3.1 Terme correcteur

On ne peut pas appliquer l'estimation a priori (2.32) au terme $\mathbf{R}_{m,\delta}$, à cause du défaut de continuité des termes $\text{rot } \mathbf{R}_{m,\delta} \times \mathbf{n}$ et $\varepsilon(\delta) \mathbf{R}_{m,\delta} \cdot \mathbf{n}$ à l'interface Σ , voir les relations (7.17)₃ et (7.19). Dans cette sous-section, on construit un terme correcteur $\mathbf{C}_{m,\delta}$ à support dans le domaine Ω_{is} tel que l'on puisse appliquer l'estimation a priori (2.32) au terme $\mathbf{u}_{m,\delta} = \mathbf{R}_{m,\delta} - \mathbf{C}_{m,\delta}$.

Proposition 7.7 Soient $s \geq 2$ et $\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s-2}(\Omega)$ à support dans Ω_{is} tel que $\text{div } \mathbf{F} = 0$ dans Ω . Sous l'hypothèse spectrale 2.24, pour tout $m \in \llbracket 0, \lfloor s \rfloor - 2 \rrbracket$, il existe $\mathbf{C}_{m,\delta} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$

à support dans Ω_{is} tel que si on définit $\mathbf{u}_{m,\delta} := \mathbf{R}_{m,\delta} - \mathbf{C}_{m,\delta}$, alors :

$\mathbf{u}_{m,\delta} \in \mathbf{X}_{\mathbf{T}}(\Omega, \delta)$ vérifie

$$\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{X}_{\mathbf{T}}(\Omega, \delta), \quad \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{u}_{m,\delta} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{u}_{m,\delta} \cdot \bar{\mathbf{E}}' \right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{F}_{m,\delta} \cdot \bar{\mathbf{E}}' d\mathbf{x} \quad (7.39)$$

et

$$\operatorname{div} (\varepsilon(\delta) \mathbf{u}_{m,\delta}) = -\frac{1}{\kappa^2} \operatorname{div} \mathbf{F}_{m,\delta} \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega)$$

où $\mathbf{F}_{m,\delta} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega)$ est défini par sous-domaines de la façon suivante

$$\mu \mathbf{F}_{m,\delta}^{\text{is}} = -\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{C}_{m,\delta}^{\text{is}} + \kappa^2 \mathbf{C}_{m,\delta}^{\text{is}} \quad \text{dans} \quad \Omega_{\text{is}}$$

et

$$\mu \mathbf{F}_{m,\delta}^{\text{cd}} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} - \kappa^2 \left(1 + \frac{i}{\delta^2} \right) \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} \quad \text{dans} \quad \Omega_{\text{cd}}.$$

De plus, il existe une constante $C_m > 0$ indépendante de δ telle que

$$\|\mathbf{C}_{m,\delta}\|_{2,\Omega} \leq C_m \delta^{m-1}. \quad (7.40)$$

PREUVE. Soit $\mathbf{C}_{m,\delta} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ à support dans le domaine Ω_{is} et $\mathbf{u}_{m,\delta} := \mathbf{R}_{m,\delta} - \mathbf{C}_{m,\delta}$, où $\mathbf{R}_{m,\delta}$ satisfait la définition 7.3. D'après la proposition 7.4, il vient

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{cd}} \times \mathbf{n} &= \mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} + \mathbf{C}_{m,\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} & \Sigma \\ \delta^{-1} \sum_{n=0}^1 \delta^n \mathbf{B}^n(\mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{cd}}) &= \operatorname{rot} \mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} + \delta^m \mathbf{B}^0 \mathbf{W}_{m+1}^{\text{cd}} + \operatorname{rot} \mathbf{C}_{m,\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} & \Sigma \\ (1 + \frac{i}{\delta^2}) \mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{cd}} \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} + \sum_{k=0}^1 (w_{m-k}^{\text{cd}} - \tilde{\mathbf{E}}_{m-k}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n}) \delta^{m-k} - \mathbf{C}_{m,\delta}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} & \Sigma \\ \operatorname{rot} \mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} &= -\operatorname{rot} \mathbf{C}_{m,\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} & \partial\Omega \end{aligned} \quad (7.41)$$

D'après la relation (7.38), voir remarque 7.5 (ii), on a

$$\partial_3 \mathcal{W}_{m+1}^{\text{cd}}|_{\Sigma} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma). \quad (7.42)$$

On définit sur Σ

$$\mathcal{H}_{m,\delta} := -\delta^m \partial_3 \mathcal{W}_{m+1}^{\text{cd}} \quad \text{et} \quad g_{m,\delta} := \sum_{k=0}^1 (w_{m-k}^{\text{cd}} - \tilde{\mathbf{E}}_{m-k}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n}) \delta^{m-k}.$$

D'après (7.42) et (7.7), on a respectivement

$$\mathcal{H}_{m,\delta} \in \mathbf{H}^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \quad \text{et} \quad g_{m,\delta} \in H^{\frac{3}{2}}(\Sigma).$$

On construit le terme correcteur $\mathbf{C}_{m,\delta}$ en relevant les traces de $\mathcal{H}_{m,\delta}$ et $g_{m,\delta}$ sur Σ de la façon suivante : il existe $\mathbf{C}_{m,\delta} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ à support dans le domaine Ω_{is} tel que

$$\begin{cases} \mathbf{C}_{m,\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \Sigma \\ \mathbf{C}_{m,\delta}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} = g_{m,\delta} & \text{sur } \Sigma \\ \partial_3 \mathbf{C}_{m,\delta}^{\text{is}} = \mathcal{H}_{m,\delta} & \text{sur } \Sigma \\ \partial_3 \mathbf{C}_{m,\delta}^{\text{is}} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.43)$$

et il existe $C_m > 0$ indépendante de δ tel que

$$\|\mathbf{C}_{m,\delta}\|_{2,\Omega} \leq C_m (\|\mathcal{H}_{m,\delta}\|_{\frac{1}{2},\Sigma} + \|g_{m,\delta}\|_{\frac{3}{2},\Sigma}). \quad (7.44)$$

Par définition de $\mathcal{H}_{m,\delta}$ et $g_{m,\delta}$ ceci prouve l'estimation (7.40). Par régularité du terme $\mathbf{R}_{m,\delta}$, voir (7.15), il vient :

$$\mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{is}} \in \mathbf{H}^2(\Omega_{\text{is}}) \quad \text{et} \quad \mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{cd}} \in \mathbf{H}^{\frac{3}{2}}(\Omega_{\text{cd}}). \quad (7.45)$$

De plus, d'après la proposition 7.4 et les relations (7.41), il vient

$$\begin{cases} \text{rot rot } \mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{is}} - \kappa^2 \mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{is}} = \mu \mathbf{F}_{m,\delta}^{\text{is}} & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \text{rot rot } \mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{cd}} - \kappa^2 (1 + \frac{i}{\delta^2}) \mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{cd}} = \mu \mathbf{F}_{m,\delta}^{\text{cd}} & \text{dans } \Omega_{\text{cd}} \\ \delta^{-1} \sum_{n=0}^1 \delta^n \mathbf{B}^n(\mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{cd}}) = \text{rot } \mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \\ \mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{cd}} \times \mathbf{n} = \mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} & \text{sur } \Sigma \\ \text{rot } \mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{is}} \times \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (7.46)$$

où

$$\mu \mathbf{F}_{m,\delta}^{\text{is}} = -\text{rot rot } \mathbf{C}_{m,\delta}^{\text{is}} + \kappa^2 \mathbf{C}_{m,\delta}^{\text{is}} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}} \quad (7.47)$$

et

$$\mu \mathbf{F}_{m,\delta}^{\text{cd}} = \text{rot rot } \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} - \kappa^2 (1 + \frac{i}{\delta^2}) \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} \quad \text{dans } \Omega_{\text{cd}}. \quad (7.48)$$

D'après la proposition 2.15, on en déduit que $\mathbf{u}_{m,\delta}$ vérifie la relation

$$\frac{1}{\mu} \text{rot rot } \mathbf{u}_{m,\delta} - \kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{u}_{m,\delta} = \mathbf{F}_{m,\delta} \quad \text{dans } \Omega \quad (7.49)$$

au sens des distributions. Par intégrations par partie, il vient

$$\forall \mathbf{E}' \in \mathbf{X}_T(\Omega, \delta), \quad \int_{\Omega} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{u}_{m,\delta} \cdot \text{rot } \bar{\mathbf{E}}' - \kappa^2 \varepsilon(\delta) \mathbf{u}_{m,\delta} \cdot \bar{\mathbf{E}}' \right) d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{F}_{m,\delta} \cdot \bar{\mathbf{E}}' d\mathbf{x}. \quad (7.50)$$

De plus, d'après (7.49), puisque $\kappa > 0$, il vient

$$\operatorname{div}(\varepsilon(\delta) \mathbf{u}_{m,\delta}) = -\frac{1}{\kappa^2} \operatorname{div} \mathbf{F}_{m,\delta} \quad \text{dans } \Omega \quad (7.51)$$

au sens des distributions. Enfin, on démontre que $\varepsilon(\delta) \mathbf{u}_{m,\delta} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$: vu la régularité de $\mathbf{u}_{m,\delta}$ par sous-domaines, voir (7.45), il suffit de prouver que

$$[\varepsilon(\delta) \mathbf{u}_{m,\delta} \cdot \mathbf{n}]_{\Sigma} = 0,$$

ce qui est une conséquence des relations (7.41)₃ et (7.43)₂. Ainsi, la relation (7.51) est vraie dans $L^2(\Omega)$. Enfin, on a $\mathbf{C}_{m,\delta}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$, et donc $\mathbf{F}_{m,\delta}^{\text{is}} \cdot \mathbf{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. ■

Remarque 7.8 D'après la proposition 7.4, il vient dans \mathcal{O}'

$$\mu \mathbf{F}_{m,\delta}^{\text{cd}} = \delta^{m-1} \mathbf{L}^0 \mathbf{W}_{m+1}^{\text{cd}} - \delta^m \sum_{k=2}^m \delta^{k-2} \sum_{j=k}^m \mathbf{L}^j(\mathbf{W}_{m-j+k}^{\text{cd}}) - \sum_{k=1}^m \delta^{k-2} \mathcal{R}_m \mathbf{W}_k^{\text{cd}}. \quad (7.52)$$

7.3.2 Estimations des restes

Le résultat principal de ce chapitre est le suivant.

Théorème 7.9 Soient $s \geq 2$ et $\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s-2}(\Omega)$ à support dans Ω_{is} tel que $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ dans Ω . Sous l'hypothèse spectrale 2.24, pour tout $m = 0, \dots, [s] - 2$, la solution \mathbf{E}_δ du problème (7.1) admet le développement asymptotique suivant

$$\mathbf{E}_\delta = \sum_{j=0}^m \mathbf{E}_j \delta^j + \mathbf{R}_{m,\delta} \quad \text{où} \quad \mathbf{E}_j|_{\Omega_{\text{is}}} = \mathbf{E}_j^{\text{is}} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}_j|_{\mathcal{O}}(\mathbf{x}, \delta) = \mathbf{W}_j^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{h}{\delta})$$

et le reste $\mathbf{R}_{m,\delta}$ d'ordre m satisfait l'estimation suivante pour $\delta \in (0, \delta_0)$:

$$\|\operatorname{rot} \mathbf{R}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} + \|\operatorname{div} \varepsilon(\delta) \mathbf{R}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{R}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\delta} \|\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}}\|_{0,\Omega_{\text{cd}}} \leq C_m \delta^{m-1} \quad (7.53)$$

où $C_m > 0$ est une constante indépendante de δ .

PREUVE. On peut appliquer l'estimation a priori (2.32) du théorème 2.25 au terme $\mathbf{u}_{m,\delta}$ défini dans la proposition 7.7 ; on a pour $\delta \in (0, \delta_0)$

$$\|\operatorname{rot} \mathbf{u}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} + \|\operatorname{div} \varepsilon(\delta) \mathbf{u}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{u}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\delta} \|\mathbf{u}_{m,\delta}^{\text{cd}}\|_{0,\Omega_{\text{cd}}} \leq C_m \|\mathbf{F}_{m,\delta}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)} \quad (7.54)$$

où C_m est indépendante de δ et où $\mathbf{F}_{m,\delta}$ est défini par sous domaines à partir des relations (7.47) et (7.48). Or, d'après (7.15), on a

$$\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}} \in \mathbf{H}^2(\Omega_{\text{is}}) \quad \text{et} \quad \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} \in \mathbf{H}^{\frac{3}{2}}(\Omega_{\text{cd}}) \quad (7.55)$$

car $s - m \geq 2$. Par une inégalité triangulaire, il vient

$$\begin{aligned} & \|\operatorname{rot} \mathbf{R}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} + \|\operatorname{div} \varepsilon(\delta) \mathbf{R}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} + \|\mathbf{R}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} + \frac{1}{\delta} \|\mathbf{R}_{m,\delta}\|_{0,\Omega_{\text{cd}}} \leq \\ & C_m \left(\|\mathbf{F}_{m,\delta}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div},\Omega)} + \|\operatorname{rot} \mathbf{C}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} + \|\operatorname{div} \varepsilon(\delta)^{\text{is}} \mathbf{C}_{m,\delta}^{\text{is}}\|_{0,\Omega_{\text{is}}} + \|\mathbf{C}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} \right). \end{aligned} \quad (7.56)$$

De plus, d'après la relation (7.52), il vient

$$\|\mathbf{F}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} \lesssim \delta^{m-1}. \quad (7.57)$$

On démontre à présent l'estimation suivante

$$\|\operatorname{div} \mathbf{F}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} \lesssim \delta^{m-1}. \quad (7.58)$$

Par définition de $\mathbf{F}_{m,\delta}$, voir la proposition 7.7, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{F}_{m,\delta}^{\text{is}} &= \frac{\kappa^2}{\mu} \operatorname{div} \mathbf{C}_{m,\delta} & \text{dans } \Omega_{\text{is}} \\ \operatorname{div} \mathbf{F}_{m,\delta}^{\text{cd}} &= -\frac{\kappa^2}{\mu} \left(1 + \frac{i}{\delta^2}\right) \operatorname{div} \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} & \text{dans } \Omega_{\text{cd}} \end{aligned} \quad (7.59)$$

D'après l'estimation (7.40), il vient

$$\|\operatorname{div} \mathbf{F}_{m,\delta}^{\text{is}}\|_{1,\Omega_{\text{is}}} \leq C_m \delta^{m-1}.$$

D'après (7.55), on a $\operatorname{div} \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} \in L^2(\Omega_{\text{cd}})$, donc d'après (7.59), il vient $\operatorname{div} \mathbf{F}_{m,\delta}^{\text{cd}} \in L^2(\Omega_{\text{cd}})$ et

$$\|\operatorname{div} \mathbf{F}_{m,\delta}^{\text{cd}}\|_{0,\Omega_{\text{cd}}} \lesssim \left|1 + \frac{i}{\delta^2}\right| \|\operatorname{div} \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}}\|_{0,\Omega_{\text{cd}}}.$$

De plus, d'après l'identité (7.18) on a l'estimation

$$\|\operatorname{div} \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}}\|_{0,\Omega_{\text{cd}}} \lesssim \delta^{m+1}.$$

On en déduit l'estimation (7.58). Enfin, d'après l'estimation (7.40), il vient

$$\|\operatorname{rot} \mathbf{C}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} + \|\operatorname{div} \varepsilon(\delta)^{\text{is}} \mathbf{C}_{m,\delta}^{\text{is}}\|_{0,\Omega_{\text{is}}} + \|\mathbf{C}_{m,\delta}\|_{0,\Omega} \lesssim \delta^{m-1}. \quad (7.60)$$

D'après les relations (7.57), (7.58) et (7.60), on en déduit l'estimation (7.53). ■

Remarque 7.10 On peut démontrer des estimations en puissances de δ similaires à (7.53) pour les restes du développement asymptotique du champ magnétique.

7.3.3 Estimations optimales des restes

Afin d'obtenir des estimations optimales des restes du développement asymptotique, on utilise les estimations suivantes, voir [25] pour des résultats similaires.

Lemme 7.11 *Soient $s \geq 2$ et $\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s-2}(\Omega)$ à support dans Ω_{is} tel que $\text{div } \mathbf{F} = 0$ dans Ω . Il existe une constante $C > 0$ indépendante de δ telle que pour tout $m = 0, \dots, \lfloor s \rfloor - 2$, on a*

$$\|\mathbf{E}_m^{\text{is}}\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_{\text{is}})} \leq C \quad (7.61)$$

et

$$\|\chi \mathbf{E}_m^{\text{cd}}\|_{0, \Omega_{\text{cd}}} \leq C \delta^{\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|\chi \mathbf{E}_m^{\text{cd}}\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_{\text{cd}})} \leq C \delta^{-\frac{1}{2}}. \quad (7.62)$$

PREUVE. D'après la proposition 5.14, on a

$$\mathbf{E}_k^{\text{is}} = \mathcal{R}^{\text{is}} \circ \mathfrak{T}_k(\mathbf{E}_0^{\text{is}})$$

où $\mathcal{R}^{\text{is}} \circ \mathfrak{T}_k$ est un opérateur continu

$$\mathcal{R}^{\text{is}} \circ \mathfrak{T}_k : \mathbf{H}^s(\Omega_{\text{is}}) \rightarrow \mathbf{H}^{s-k}(\Omega_{\text{is}}).$$

On en déduit l'estimation (7.61). Les estimations (7.62) s'obtiennent par le changement de variable $Y_3 = \frac{h}{\delta}$ dans les intégrales à partir de la relation

$$\mathbf{E}_m^{\text{cd}}(\mathbf{x}, \delta) = \mathbf{W}_m^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{h}{\delta}) \quad \text{si} \quad \mathbf{x} \in \mathcal{O}$$

en utilisant que les termes $\mathbf{W}_m^{\text{cd}}(y_\alpha, \frac{h}{\delta})$ sont exponentiellement décroissants en $Y_3 = \frac{h}{\delta}$ uniformément en y_α . ■

On déduit du théorème 7.9 des estimations optimales des restes. Ceci fait l'objet du résultat suivant.

Corollaire 7.12 *Soient $s \geq 4$ et $\mathbf{F} \in \mathbf{H}^{s-2}(\Omega)$ à support dans Ω_{is} tel que $\text{div } \mathbf{F} = 0$ dans Ω . Sous l'hypothèse spectrale 2.24, il existe $\delta_0 > 0$ assez petit, tel que pour tout $\delta \in (0, \delta_0)$, pour tout $m = 0, \dots, \lfloor s \rfloor - 2$, le reste $\mathbf{R}_{m,\delta}$ du développement asymptotique satisfait les estimations suivantes*

$$\|\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}}\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_{\text{cd}})} \leq C_{m+2} \delta^{m+\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{is}}\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_{\text{is}})} \leq C_{m+2} \delta^{m+1} \quad (7.63)$$

où $C_{m+2} > 0$ est une constante indépendante de δ .

PREUVE. Par définition des restes, on a

$$\mathbf{R}_{m+2,\delta}^{\text{cd}} = \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} + \delta^{m+1} \chi \mathbf{E}_{m+1}^{\text{cd}} + \delta^{m+2} \chi \mathbf{E}_{m+2}^{\text{cd}} \quad \text{dans} \quad \Omega_{\text{cd}}.$$

Or, d'après le théorème 7.9, pour $\delta \in (0, \delta_0)$, il vient

$$\|\mathbf{R}_{m+2,\delta}^{\text{cd}}\|_{\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_{\text{cd}})} \leq C_{m+2} \delta^{m+1}$$

où C_{m+2} est une constante indépendante de δ . D'après l'estimation (7.62), on en déduit la première estimation dans (7.63). Pour démontrer la seconde estimation dans (7.63), on écrit encore

$$\mathbf{R}_{m+2,\delta}^{\text{is}} = \mathbf{R}_{m,\delta}^{\text{cd}} + \delta^{m+1} \mathbf{E}_{m+1}^{\text{is}} + \delta^{m+2} \mathbf{E}_{m+2}^{\text{is}} \quad \text{dans } \Omega_{\text{is}}.$$

D'après l'estimation du théorème 7.9 appliquée à \mathbf{R}_{m+2} et l'estimation (7.61), on en déduit le résultat. ■

Chapitre 8

Calculs éléments finis en configuration axisymétrique

8.1 Introduction

Dans ce huitième chapitre, on présente des calculs numériques en géométrie cylindrique, sphérique et sphéroïdale pour le champ magnétique qui mettent en évidence l'*effet de peau* par la décroissance exponentielle du champ magnétique près de la surface du conducteur ainsi que l'influence de la géométrie de l'interface sur la manifestation de ce phénomène. La précision des formules théoriques du développement asymptotique calculé au chapitre 6 pour le champ magnétique nous amène à redéfinir la notion d'*épaisseur de peau*.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Au paragraphe 8.2, on rappelle le problème étudié pour le champ magnétique et la notion de domaine méridien en configuration géométrique axisymétrique. Pour une donnée du problème axisymétrique et orthoradiale, on se ramène à l'étude d'un problème scalaire posé pour la composante orthoradiale du champ magnétique. Au paragraphe 8.3, on présente des calculs de simulations numériques qu'on compare avec des calculs issus de techniques asymptotiques en configuration cylindrique. Les résultats obtenus par ces deux approches sont cohérents. L'objet de la section suivante 8.4 est la présentation de calculs et résultats similaires en configuration sphérique. Enfin, on présente au paragraphe 8.5 des calculs théoriques et numériques en géométrie ellipsoïdale.

8.2 Axisymétrie

On rappelle le problème 3D auquel on s'intéresse pour le champ magnétique, voir le paragraphe 6.4.1. La formulation variationnelle pour le champ magnétique $\mathbf{H}_\delta \in \mathbf{X}_N(\Omega)$ est la suivante

Trouver $\mathbf{H}_\delta \in \mathbf{X}_N(\Omega)$ tel que pour tout $\mathbf{K} \in \mathbf{X}_N(\Omega)$

$$\int_{\Omega} \left(-\frac{1}{\varepsilon(\delta)} \operatorname{rot} \mathbf{H}_\delta \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{K}} + \kappa^2 \mu \mathbf{H}_\delta \cdot \bar{\mathbf{K}} \right) d\mathbf{x} = \frac{1}{i\kappa} \int_{\Omega} \operatorname{rot} \frac{1}{\varepsilon(\delta)} \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{K}} d\mathbf{x}. \quad (8.1)$$

8.2.1 Domaine axisymétrique

Dans ce paragraphe, on introduit la notion de domaine méridien associé à un domaine axisymétrique, voir [9, p.11-19]. A un point $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, on associe ses coordonnées cylindriques $(r, \theta, z) \in \mathbb{R}^+ \times]-\pi, \pi] \times \mathbb{R}$ définies par

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \begin{cases} -\arccos \frac{x_1}{r}, & \text{si } x_2 < 0, \\ \arccos \frac{x_1}{r}, & \text{si } x_2 \geq 0. \end{cases} \quad \text{et } z = x_3.$$

On suppose que Ω et Ω_{cd} sont des domaines axisymétriques réguliers. On note Ω^m le domaine méridien de Ω dans le demi-plan (r, z) . Ainsi, le domaine Ω est l'image du domaine Ω^m par une rotation d'axe $\{r = 0\}$ et d'angle 2π :

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (r, z) \in \Omega^m, \theta \in \mathbb{T}\},$$

où \mathbb{T} désigne le tore $]-\pi, \pi]$. De même, on note Ω_{cd}^m (respectivement Ω_{is}^m) le domaine méridien de Ω_{cd} (respectivement Ω_{is}), voir la Figure 1. Soit Γ_0 l'intérieur de $\partial\Omega^m \cap \{r = 0\}$ et $\Gamma = \partial\Omega^m \setminus \Gamma_0$. Alors, on a

$$\partial\Omega^m = \Gamma \cup \Gamma_0$$

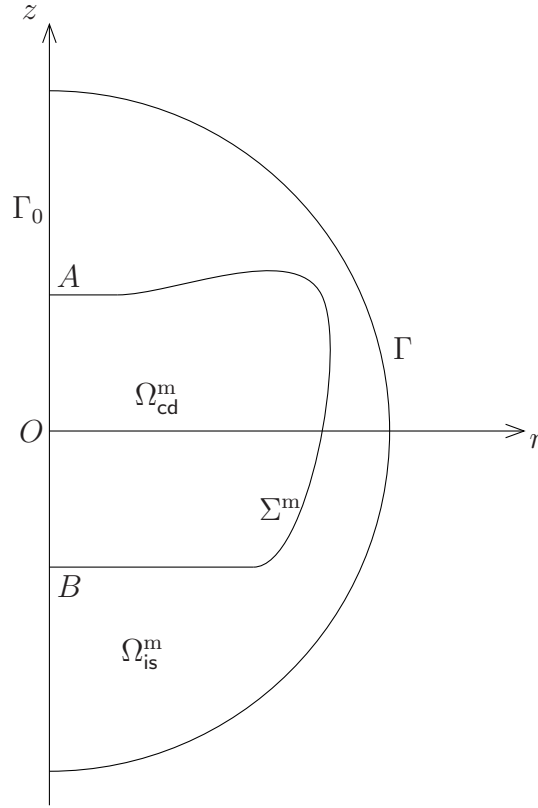
et $\partial\Omega$ est l'image de Γ par une rotation d'axe $\{r = 0\}$ et d'angle 2π . Soient Γ_0^{cd} l'intérieur du segment $\partial\Omega_{\text{cd}}^m \cap \{r = 0\}$ et $\Sigma^m = \partial\Omega_{\text{cd}}^m \setminus \Gamma_0^{\text{cd}}$ l'interface du domaine méridien. Ainsi, l'interface Σ est l'image de Σ^m par une rotation d'axe $\{r = 0\}$ et d'angle 2π :

$$\Sigma = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (r, z) \in \Sigma^m, \theta \in \mathbb{T}\}.$$

Par suite, le domaine méridien d'étude Ω^m admet la décomposition suivante

$$\Omega^m = \Omega_{\text{cd}}^m \cup \Omega_{\text{is}}^m \cup \Sigma^m.$$

On note A et B les sommets de la courbe Σ^m sur l'axe $\{r = 0\}$. Si $M \in \{A, B\}$, on note ω_M l'angle formé par la tangente à la courbe Σ^m et l'axe $\{r = 0\}$ au point M . Dans la suite, on suppose que $\omega_A = \omega_B = \frac{\pi}{2}$. De plus, on suppose que les courbes Σ^m et Γ sont régulières.

Figure 1 – Le domaine méridien Ω^m

Pour toute fonction scalaire u , on pose $\hat{u}(r, \theta, z) = u(x)$. Pour tout champ vectoriel $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$, on note (u_r, u_θ, u_z) ses *composantes cylindriques*, de sorte que

$$u_r = u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta \quad , \quad u_\theta = -u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta \quad \text{et} \quad u_z = u_3 .$$

On note enfin $\hat{\mathbf{u}} = (u_r, u_\theta, u_z)$. En particulier, si \mathbf{H} désigne le champ magnétique, on note $\hat{\mathbf{H}} = (H_r, H_\theta, H_z)$ ses composantes cylindriques. La relation suivante exprime le rotationnel en coordonnées et composantes cylindriques de \mathbf{u} ,

$$\begin{cases} (\text{rot } \mathbf{u})_r = \frac{1}{r} \partial_\theta u_z - \partial_z u_\theta \\ (\text{rot } \mathbf{u})_\theta = \partial_z u_r - \partial_r u_z \\ (\text{rot } \mathbf{u})_z = \partial_r u_\theta + \frac{1}{r} u_\theta - \frac{1}{r} \partial_\theta u_r \end{cases} \quad (8.2)$$

On le note par la suite $\text{rot}_{r,\theta,z} \hat{\mathbf{u}}$.

8.2.2 Conditions de transmission en axisymétrie

Dans la suite de ce chapitre, \mathbf{H}_δ désigne une solution du problème variationnel (8.1). On détermine à présent les conditions de transmission de $\hat{\mathbf{H}}_\delta$ à travers l'interface Σ . Le

vecteur normal unitaire \mathbf{n} sur Σ rentrant dans Ω_{cd} s'écrit (n_1, n_2, n_3) en coordonnées cartésiennes. Le domaine Ω_{cd} est axisymétrique, donc $n_\theta = 0$ et le vecteur normal unitaire correspondant s'écrit en cylindrique $\hat{\mathbf{n}} = (n_r, 0, n_z)$. On en déduit

$$\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} u_\theta n_r \\ u_z n_r - u_r n_z \\ -u_\theta n_z \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

La proposition suivante fournit les conditions de transmission sur Σ des composantes cylindriques du champ magnétique.

Proposition 8.1 *Soit $\mathbf{F} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ tel que $\frac{1}{\varepsilon(\delta)}\mathbf{F} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$. Soit $\mathbf{H}_\delta \in \mathbf{X}_\mathbf{N}(\Omega)$ une solution du problème (8.1) associé à la donnée \mathbf{F} . Alors, on a*

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{\varepsilon(\delta)}(\partial_z H_r - \partial_r H_z) \right]_\Sigma &= 0 \\ \left[\frac{1}{\varepsilon(\delta)} \left(n_r(\partial_r H_\theta + \frac{1}{r} H_\theta - \frac{1}{r} \partial_\theta H_r) - n_z(\frac{1}{r} \partial_\theta H_z - \partial_z H_\theta) \right) \right]_\Sigma &= 0 \\ [\hat{\mathbf{H}}_\delta]_\Sigma &= 0 \end{cases}$$

Remarque 8.2 (i) *La première condition de transmission de la proposition 8.1 s'écrit*

$$\partial_z H_r^{\text{is}} - \partial_r H_z^{\text{is}} = \frac{1}{1 + \frac{i}{\delta^2}} (\partial_z H_r^{\text{cd}} - \partial_r H_z^{\text{cd}}) \quad \text{sur } \Sigma.$$

(ii) *La seconde condition de transmission de la proposition 8.1 s'écrit*

$$\begin{aligned} n_r(\partial_r H_\theta^{\text{is}} + \frac{1}{r} H_\theta^{\text{is}} - \frac{1}{r} \partial_\theta H_r^{\text{is}}) - n_z(\frac{1}{r} \partial_\theta H_z^{\text{is}} - \partial_z H_\theta^{\text{is}}) = \\ \frac{1}{1 + \frac{i}{\delta^2}} \left[n_r(\partial_r H_\theta^{\text{cd}} + \frac{1}{r} H_\theta^{\text{cd}} - \frac{1}{r} \partial_\theta H_r^{\text{cd}}) - n_z(\frac{1}{r} \partial_\theta H_z^{\text{cd}} - \partial_z H_\theta^{\text{cd}}) \right] \quad \text{sur } \Sigma. \end{aligned} \quad (8.4)$$

8.2.3 Problème avec donnée axisymétrique

Pour simplifier les notations, on pose $\hat{\mathbf{f}}(r, \theta, z) = -\frac{1}{i\kappa} \text{rot} \frac{1}{\varepsilon(\delta)} \mathbf{F}$. Dans la suite de ce chapitre, on suppose que la donnée $\hat{\mathbf{f}}(r, \theta, z)$ du problème (8.1) est indépendante de θ . Sous l'hypothèse spectrale 2.24, et pour δ assez petit, le problème variationnel (8.1) admet une unique solution $\hat{\mathbf{H}}_\delta(r, \theta, z)$. Alors, par 2π -périodicité des composantes cylindriques, $\hat{\mathbf{H}}_\delta(r, \theta, z)$ est aussi indépendante de θ . Ce résultat fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 8.3 *On suppose que la donnée $\hat{\mathbf{f}}(r, \theta, z)$ du problème (8.1) est indépendante de θ . Alors, sous l'hypothèse spectrale 2.24, pour δ assez petit, la solution $\hat{\mathbf{H}}_\delta$ du problème (8.1) associée à $\hat{\mathbf{f}}$ est indépendante de θ .*

PREUVE. Soit $\theta_0 \in]-\pi, \pi]$. On démontre que $\hat{\mathbf{H}}_\delta(r, \theta + \theta_0, z) = \hat{\mathbf{H}}_\delta(r, \theta, z)$. Pour toute fonction h 2π -périodique, on a

$$\int_0^{2\pi} h(\theta + \theta_0) d\theta = \int_0^{2\pi} h(\theta) d\theta. \quad (8.5)$$

Soit $\mathbf{K} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$. Les composantes cylindriques d'un champ vectoriel sont par définition 2π -périodique, donc d'après la relation (8.5), il vient

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{\Omega^m} \frac{1}{\varepsilon(\delta)} \text{rot}_{r,\theta,z} \hat{\mathbf{H}}_\delta(r, \theta + \theta_0, z) \cdot \text{rot}_{r,\theta,z} \bar{\mathbf{K}} r dr dz d\theta = \\ \int_0^{2\pi} \int_{\Omega^m} \frac{1}{\varepsilon(\delta)} \text{rot}_{r,\theta,z} \hat{\mathbf{H}}_\delta \cdot \text{rot}_{r,\theta,z} \bar{\mathbf{K}}(r, \theta - \theta_0, z) r dr dz d\theta. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Or, $\hat{\mathbf{H}}_\delta(r, \theta, z)$ est solution de (8.1) donc

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{\Omega^m} \frac{1}{\varepsilon(\delta)} \text{rot}_{r,\theta,z} \hat{\mathbf{H}}_\delta \cdot \text{rot}_{r,\theta,z} \bar{\mathbf{K}}(r, \theta - \theta_0, z) r dr dz d\theta = \\ \int_0^{2\pi} \int_{\Omega^m} (\hat{\mathbf{f}} + \kappa^2 \hat{\mathbf{H}}_\delta) \cdot \bar{\mathbf{K}}(r, \theta - \theta_0, z) r dr dz d\theta. \end{aligned} \quad (8.7)$$

De plus, toujours d'après (8.5), on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{\Omega^m} (\hat{\mathbf{f}} + \kappa^2 \hat{\mathbf{H}}_\delta) \cdot \bar{\mathbf{K}}(r, \theta - \theta_0, z) r dr dz d\theta = \\ \int_0^{2\pi} \int_{\Omega^m} (\hat{\mathbf{f}}(r, \theta + \theta_0, z) + \kappa^2 \hat{\mathbf{H}}_\delta(r, \theta + \theta_0, z)) \cdot \bar{\mathbf{K}}(r, \theta, z) r dr dz d\theta. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Par hypothèse, $\hat{\mathbf{f}}(r, \theta, z)$ est indépendant de θ , donc

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{\Omega^m} (\hat{\mathbf{f}}(r, \theta + \theta_0, z) + \kappa^2 \hat{\mathbf{H}}_\delta(r, \theta + \theta_0, z)) \cdot \bar{\mathbf{K}}(r, \theta, z) r dr dz d\theta = \\ \int_0^{2\pi} \int_{\Omega^m} (\hat{\mathbf{f}}(r, \theta, z) + \kappa^2 \hat{\mathbf{H}}_\delta(r, \theta + \theta_0, z)) \cdot \bar{\mathbf{K}}(r, \theta, z) r dr dz d\theta. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_{\Omega^m} \left(\frac{1}{\varepsilon(\delta)} \text{rot}_{r,\theta,z} \hat{\mathbf{H}}_\delta(r, \theta + \theta_0, z) \cdot \text{rot}_{r,\theta,z} \bar{\mathbf{K}} - \kappa^2 \hat{\mathbf{H}}_\delta(r, \theta + \theta_0, z) \cdot \bar{\mathbf{K}} \right) r dr dz d\theta = \\ \int_0^{2\pi} \int_{\Omega^m} \hat{\mathbf{f}}(r, \theta, z) \cdot \bar{\mathbf{K}}(r, \theta, z) r dr dz d\theta. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Donc, $\hat{\mathbf{H}}_\delta(r, \theta + \theta_0, z)$ est solution de (8.1). L'hypothèse spectrale 2.24 assure l'unicité de la solution de (8.1), on en déduit la relation $\hat{\mathbf{H}}_\delta(r, \theta + \theta_0, z) = \hat{\mathbf{H}}_\delta(r, \theta, z)$. ■

Ainsi, on se ramène à résoudre le problème 2D suivant :

Trouver $\hat{\mathbf{H}}_\delta(r, z) \in \mathbf{X}_N(\Omega)$ tel que $\forall \tilde{\mathbf{K}} \in \mathbf{X}_N(\Omega)$

$$\int_{\Omega^m} \left(\frac{1}{\varepsilon(\delta)} \operatorname{rot}_{r,\theta,z} \hat{\mathbf{H}}_\delta \cdot \operatorname{rot}_{r,\theta,z} \tilde{\mathbf{K}} - \kappa^2 \hat{\mathbf{H}}_\delta \cdot \tilde{\mathbf{K}} \right) r dr dz = \int_{\Omega^m} \mathbf{f} \cdot \tilde{\mathbf{K}} r dr dz. \quad (8.11)$$

De plus, les conditions de transmission du champ magnétique sur Σ s'écrivent

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{1+\frac{i}{\delta^2}} (\partial_z H_r - \partial_r H_z) \right]_\Sigma & = 0 \\ \left[\frac{1}{1+\frac{i}{\delta^2}} \left(n_r (\partial_r H_\theta + \frac{1}{r} H_\theta) + n_z (\partial_z H_\theta) \right) \right]_\Sigma & = 0 \\ [\hat{\mathbf{H}}_\delta]_\Sigma & = 0 \end{cases} \quad (8.12)$$

Ces conditions de transmission sur Σ s'écrivent encore

$$\begin{cases} (\partial_z H_r^{\text{is}} - \partial_r H_z^{\text{is}}) & = \frac{1}{1+\frac{i}{\delta^2}} (\partial_z H_r^{\text{cd}} - \partial_r H_z^{\text{cd}}) \\ n_r (\partial_r H_\theta^{\text{is}} + \frac{1}{r} H_\theta^{\text{is}}) + n_z (\partial_z H_\theta^{\text{is}}) & = \frac{1}{1+\frac{i}{\delta^2}} \left[n_r (\partial_r H_\theta^{\text{cd}} + \frac{1}{r} H_\theta^{\text{cd}}) + n_z (\partial_z H_\theta^{\text{cd}}) \right] \\ \hat{\mathbf{H}}_\delta^{\text{is}} & = \hat{\mathbf{H}}_\delta^{\text{cd}} \end{cases} \quad (8.13)$$

8.2.4 Problème avec donnée axisymétrique et orthoradiale

On s'intéresse à présent au problème (8.11). Au paragraphe précédent, on a supposé la donnée $\hat{\mathbf{f}} = (f_r, f_\theta, f_z)$ axisymétrique. On effectue à présent l'hypothèse supplémentaire que $\hat{\mathbf{f}}$ est orthoradiale, i.e

$$f_r = f_z = 0.$$

Proposition 8.4 *On suppose que la donnée $\hat{\mathbf{f}} = (f_r, f_\theta, f_z)$ du problème (8.11) est axisymétrique et orthoradiale. Sous l'hypothèse spectrale 2.24, on note $\hat{\mathbf{H}}_\delta(r, z)$ la solution du problème (8.11) pour δ assez petit. Alors, ses composantes H_r et H_z sont nulles, i.e. $\hat{\mathbf{H}}_\delta$ est orthoradial. De plus, les conditions de transmission sur Σ s'écrivent*

$$\begin{cases} \left[\frac{1}{\varepsilon(\delta)} \left(n_r (\partial_r H_\theta + \frac{1}{r} H_\theta) + n_z (\partial_z H_\theta) \right) \right]_\Sigma & = 0 \\ [H_\theta]_\Sigma & = 0 \end{cases} \quad (8.14)$$

PREUVE. D'après (8.2), on a en coordonnées cylindriques

$$\begin{cases} (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \hat{\mathbf{H}})_r = \partial_r \partial_z H_z - \partial_z^2 H_r - \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 H_r + \frac{1}{r} \partial_r \partial_\theta H_\theta + \frac{1}{r^2} \partial_\theta H_\theta \\ (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \hat{\mathbf{H}})_\theta = -\partial_r^2 H_\theta - \frac{1}{r} \partial_r H_\theta - \partial_z^2 H_\theta + \frac{1}{r^2} H_\theta + \frac{1}{r} \partial_r \partial_\theta H_r - \frac{1}{r^2} \partial_\theta H_r + \frac{1}{r} \partial_z \partial_\theta H_z \\ (\operatorname{rot} \operatorname{rot} \hat{\mathbf{H}})_z = \partial_r \partial_z H_r - \partial_r^2 H_z + \frac{1}{r} \partial_z H_r - \frac{1}{r} \partial_r H_z - \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 H_z + \frac{1}{r} \partial_z \partial_\theta H_\theta \end{cases}$$

voir [9, p.22-23]. D'après la proposition 8.3, les composantes de $\hat{\mathbf{H}}_\delta(r, z)$ vérifient donc les EDP suivantes dans Ω^m au sens des distributions

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon(\delta)} (\partial_r \partial_z H_z - \partial_z^2 H_r) - \kappa^2 H_r & = 0 \\ \frac{1}{\varepsilon(\delta)} (-\partial_r^2 H_\theta - \frac{1}{r} \partial_r H_\theta - \partial_z^2 H_\theta + \frac{1}{r^2} H_\theta) - \kappa^2 H_\theta & = f_\theta \\ \frac{1}{\varepsilon(\delta)} (\partial_r \partial_z H_r - \partial_r^2 H_z + \frac{1}{r} \partial_z H_r - \frac{1}{r} \partial_r H_z) - \kappa^2 H_z & = 0 \end{cases}$$

Ce problème est découplé en (H_r, H_z) et H_θ . Par unicité de la solution de (8.11), il vient $H_r = H_z = 0$ dans Ω^m et H_θ satisfait l'équation

$$\frac{1}{\varepsilon(\delta)} (-\partial_r^2 H_\theta - \frac{1}{r} \partial_r H_\theta - \partial_z^2 H_\theta + \frac{1}{r^2} H_\theta) - \kappa^2 H_\theta = f_\theta \quad \text{dans } \Omega^m.$$

■

Remarque 8.5 La première condition de transmission de la proposition 8.4 s'écrit

$$n_r(\partial_r H_\theta^{\text{is}} + \frac{1}{r} H_\theta^{\text{is}}) + n_z(\partial_z H_\theta^{\text{is}}) = \frac{1}{1 + \frac{i}{\delta^2}} \left[n_r(\partial_r H_\theta^{\text{cd}} + \frac{1}{r} H_\theta^{\text{cd}}) + n_z(\partial_z H_\theta^{\text{cd}}) \right] \quad \text{sur } \Sigma.$$

Dans la suite, on note simplement H_δ la composante orthoradiale de la solution du problème (8.11). On précise à présent la nature de H_δ . On introduit au préalable des espaces de Sobolev à poids. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, l'espace $L_\alpha^2(\Omega^m)$ est défini comme l'ensemble des fonctions mesurables v tel que

$$\|v\|_{L_\alpha^2(\Omega^m)}^2 = \int_{\Omega^m} |v|^2 r^\alpha dr dz < +\infty.$$

On définit les espaces de Sobolev à poids associés au problème axisymétrique (8.11).

Définition 8.6 Pour $m \in \mathbb{N}$,

$$H_1^m(\Omega^m) = \{v \in L_1^2(\Omega^m) \mid \partial_r^l \partial_z^{m-l} v \in L_1^2(\Omega^m), l \in \llbracket 0, m \rrbracket\},$$

$$V_1^m(\Omega^m) = \{v \in H_1^m(\Omega^m) \mid \partial_r^l v|_{\Gamma_0} = 0, 0 \leq l < m-1, \partial_r^{m-1} v \in L_{-1}^2(\Omega^m)\},$$

$$V_1^1(\Omega^m) = \{v \in H_1^1(\Omega^m) \mid v \in L_{-1}^2(\Omega^m)\},$$

$$V_{1,\Gamma}^1(\Omega^m) = \{v \in V_1^1(\Omega^m) \mid v = 0 \quad \text{sur } \Gamma\}.$$

Remarque 8.7 Si $u \in V_1^1(\Omega^m)$, alors $u = 0$ sur Γ_0 , voir [9, Remark II.1.1].

On définit aussi les espaces de traces sur Σ associés aux espaces $L_1^2(\Omega^m)$ et $H_1^1(\Omega^m)$.

Définition 8.8 L'espace $H_1^{-\frac{1}{2}}(\Sigma)$, respectivement $H_1^{\frac{1}{2}}(\Sigma)$, désigne l'espace des traces Dirichlet de $L_1^2(\Omega^m)$, respectivement $H_1^1(\Omega^m)$ sur Σ .

La formulation variationnelle (8.11) sous les hypothèses précédentes s'écrit alors en composante orthoradiale, voir [9, (II.4.14)]

Trouver $u = H_\delta \in V_{1,\Gamma}^1(\Omega^m)$ tel que $\forall v \in V_{1,\Gamma}^1(\Omega^m)$,

$$\int_{\Omega^m} \frac{1}{\varepsilon(\delta)} \left(\partial_z u \partial_z \bar{v} + \frac{1}{r} \partial_r(ru) \frac{1}{r} \partial_r(r\bar{v}) \right) r dr dz - \kappa^2 \int_{\Omega^m} u \bar{v} r dr dz = \int_{\Omega^m} f \bar{v} r dr dz. \quad (8.15)$$

8.3 Géométrie axisymétrique et cylindrique

Dans ces trois dernières parties, on présente des résultats de simulations numériques du champ magnétique en géométrie axisymétrique (cylindrique, sphérique et sphéroïdale). Les calculs numériques mettent en évidence la décroissance exponentielle du champ magnétique à la surface du conducteur ainsi que l'influence de la géométrie de l'interface sur la manifestation du phénomène de l'effet de peau, voir le paragraphe 8.3.3. Le paramètre caractéristique $\ell(\sigma)$ associé à ce phénomène et référencé dans la littérature est défini ci-dessous.

Définition 8.9 Dans un modèle unidimensionnel de l'effet de peau où le conducteur de conductivité σ est modélisé par un demi-espace, l'épaisseur de peau caractéristique $\ell(\sigma)$ définie par

$$\ell(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}$$

est la distance à l'interface plane pour laquelle l'amplitude de l'onde plane électromagnétique a diminué d'un facteur e par rapport à son amplitude à l'interface.

Le tableau suivant regroupe les valeurs de l'épaisseur de peau $\ell(\sigma)$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$ et pour une pulsation $\omega = 3.10^7$ Hz.

σ	5	20	80
$\ell(\sigma)$ (cm)	10.3	5.15	2.58

En explicitant les formules théoriques du développement asymptotique dans chacune de ces géométries, on va mettre en évidence l'influence de la courbure moyenne de

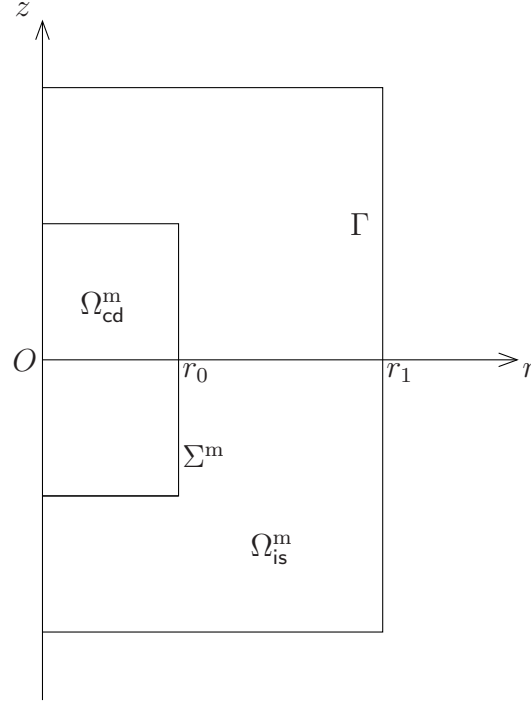
l'interface sur la manifestation de l'*effet de peau*. Afin de généraliser le paramètre $\ell(\sigma)$ à notre modèle de l'*effet de peau* en configuration axisymétrique, on définit une longueur caractéristique et intrinsèque $\mathcal{L}(\sigma)$ où l'amplitude du champ magnétique a diminué d'un taux fixe, par la relation suivante

$$\mathcal{L}(\sigma) = \frac{\ell(\sigma)}{1 - \mathcal{H} \ell(\sigma)} ,$$

pour σ assez grand tel que $1 - \mathcal{H} \ell(\sigma) > 0$, où \mathcal{H} désigne la courbure moyenne de l'interface. D'un point de vue physique, cette relation signifie que l'*effet de peau* se manifeste d'autant plus près de la surface du conducteur où la courbure moyenne de l'interface est élevée. Des régressions linéaires à partir d'extractions numériques sur les simulations numériques de l'*effet de peau* montrent que les pentes numériques sous-jacentes sont cohérentes avec les pentes homologues obtenues par des techniques asymptotiques et inversement proportionnelles à l'*épaisseur de peau* $\mathcal{L}(\sigma)$.

Géométrie cylindrique

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que Ω_{cd} et Ω sont deux cylindres coaxiaux, de rayons respectifs r_0 et r_1 , voir Figure 2 ci-dessous où on a dessiné les domaines méridiens correspondants $\Omega_{\text{cd}}^{\text{m}}$ et Ω^{m} dans le demi-plan (r, z) . On rappelle que (r, θ, z) désignent les coordonnées cylindriques, voir le paragraphe 8.2. On note $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ la base de vecteurs coordonnés associée aux coordonnées (r, θ, z) . Dans cette partie, on met en évidence la décroissance exponentielle du champ magnétique dans la direction $-\vec{e}_r$ normale à l'interface $\Sigma^{\text{m}} \cap \{r = r_0\}$ dans le domaine méridien conducteur $\Omega_{\text{cd}}^{\text{m}}$. On montre aussi l'influence de la courbure moyenne de l'interface sur le phénomène de l'*effet de peau*.

Figure 2 – Le domaine méridien Ω^m

Calcul des composantes contravariantes du champ magnétique \mathbf{H}

Soit $(y_\alpha) := (z, \theta)$ un système de coordonnées locales sur l'interface Σ . Ce système induit une paramétrisation F de Σ , donnée par $F(z, \theta) = (r_0 \cos \theta, r_0 \sin \theta, z)$. On définit un voisinage tubulaire de Σ dans Ω_{cd} comme l'image \mathcal{O} de l'application

$$(F(z, \theta), h) \mapsto F(z, \theta) + h \mathbf{n}(F(z, \theta))$$

de $\Sigma \times (0, h_0)$ dans \mathbb{R}^3 . Au voisinage des points de coordonnées cylindriques $(r_0, \theta, 0)$ dans \mathcal{O} , où $\theta \in \mathbb{T}$, on a ainsi un système de coordonnées normales

$$(y_\alpha, h) = (z, \theta, h) \quad \text{où} \quad h = y_3 = r_0 - r,$$

voir le chapitre 3. Les vecteurs coordonnés issus de cette carte locale, et notés X_i respectivement, sont les suivants

$$X_1 = \vec{e}_z, \quad X_2 = r \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad X_3 = -\vec{e}_r = \mathbf{n}. \quad (8.16)$$

Ainsi, les 1-formes de la base duale dy^i sont

$$dy^1 = \vec{e}_z^*, \quad dy^2 = \frac{1}{r} \vec{e}_\theta^* \quad \text{et} \quad dy^3 = -\vec{e}_r^*. \quad (8.17)$$

Donc, les composantes covariantes de \mathbf{H} dans la base (dy^1, dy^2, dy^3) s'écrivent

$$H_1 = H_z, \quad H_2 = r H_\theta \quad \text{et} \quad H_3 = -H_r \quad (8.18)$$

et les composantes contravariantes dans la base (X_1, X_2, X_3) s'écrivent

$$H^1 = H^z, \quad H^2 = \frac{1}{r} H^\theta \quad \text{et} \quad H^3 = -H^r. \quad (8.19)$$

Remarque 8.10 La base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ est orthonormée, donc les composantes cylindriques covariantes et contravariantes coïncident, i.e.

$$H_r = H^r, \quad H_\theta = H^\theta \quad \text{et} \quad H_z = H^z.$$

Calcul du tenseur de courbure $b_{\alpha\beta}$

D'après (8.16), la métrique dans \mathcal{O} associée à ce système de coordonnées normales est définie par

$$(g_{ij}(y_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et donc l'inverse du tenseur métrique s'écrit

$$(g^{ij}(y_3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule les courbures principales $b_1^1(h)$ et $b_2^2(h)$ à partir de la relation (3.11) qui s'écrit de la façon suivante dans ces coordonnées normales $(z, \theta, h = r_0 - r)$:

$$b_{\alpha\beta}(h) = \frac{1}{2} \partial_r g_{\alpha\beta}(h). \quad (8.20)$$

On en déduit les coefficients du tenseur de courbure $b_{\alpha\beta}(h)$ associé à la variété Σ_h .

Proposition 8.11 Pour tout $h \in [0, r_0]$ tel que $h = r_0 - r$, on a

$$\begin{aligned} b_{22}(h) &= r \\ b_{11}(h) &= 0 \\ b_{12}(h) &= b_{21}(h) = 0 \end{aligned} \quad (8.21)$$

PREUVE. D'après la relation (8.20), il vient

$$b_{22}(h) = r$$

De même, d'après (8.20), on a

$$b_{11}(h) = 0 \quad \text{et} \quad b_{21}(h) = b_{12}(h) = 0.$$

■

En utilisant l'inverse du tenseur métrique pour faire monter les indices, on en déduit l'expression des courbures principales. Ceci fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 8.12 *Pour tout $h \in [0, r_0)$ tel que $h = r_0 - r$, on a*

$$\begin{aligned} b_1^1(h) &= 0 \\ b_2^2(h) &= \frac{1}{r} \\ b_1^2(h) &= b_2^1(h) = 0 \end{aligned} \tag{8.22}$$

8.3.1 Résultats théoriques

On utilise ici une technique asymptotique pour mettre en évidence l'influence de la géométrie de l'interface Σ^m sur la manifestation de l'*effet de peau* à la surface du domaine Ω_{cd}^m . On rappelle qu'on a calculé au chapitre 6 un développement asymptotique du champ magnétique \mathbf{H}_δ solution du problème (8.1). Le petit paramètre δ dépend de la conductivité σ du domaine Ω^m et on a

$$\delta(\sigma) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma}} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \sigma \rightarrow \infty,$$

et l'épaisseur de peau $\ell(\sigma) = \sqrt{2/\omega\mu_0\sigma}$. Pour mettre en évidence l'influence de la géométrie de l'interface Σ^m sur l'*effet de peau*, on choisit comme approximation de \mathbf{H}_δ son développement asymptotique tronqué à l'ordre 1 et on note $H_1^{cd}(\delta)$ sa composante surfacique. On a

$$H_1^{cd}(\delta) = \mathcal{H}_0^{cd} + \delta \mathcal{H}_1^{cd}.$$

En particulier, on note $H_{\theta,1}^{cd}(\delta)$ sa composante orthoradiale et $\mathcal{H}_{\theta,j}^{cd}$ les *profils* orthoradials, de sorte que

$$H_{\theta,1}^{cd}(\delta) = \mathcal{H}_{\theta,0}^{cd} + \delta \mathcal{H}_{\theta,1}^{cd}. \tag{8.23}$$

Proposition 8.13 *Lorsque $\sigma \rightarrow \infty$ et $r_0 - r$ est assez petit, on a le développement*

$$\log_{10} |\mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta)(r_0 - \frac{r_0 - r}{\delta(\sigma)})| = C + \alpha(\sigma)(r_0 - r) + \mathcal{O}(\delta, r_0 - r),$$

où

$$\alpha(\sigma) = \frac{1}{\ln 10} \left(\mathcal{H} - \frac{1}{\ell(\sigma)} \right),$$

$\mathcal{H} = \frac{1}{2r_0}$ est la courbure moyenne sur l'interface $\Sigma^{\text{m}} \cap \{r = r_0\}$ et $C = \log_{10} |\mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma}|$.

La proposition 8.13 nous amène à redéfinir l'épaisseur de peau $\mathcal{L}(\sigma)$ telle que

$$\frac{1}{\mathcal{L}(\sigma)} = \frac{1}{\ell(\sigma)} - \mathcal{H}.$$

Définition 8.14 *Sous les hypothèses sur la configuration géométrique de cette partie, on définit l'épaisseur de peau $\mathcal{L}(\sigma)$ en tout point de l'interface $\Sigma^{\text{m}} \cap \{r = r_0\}$ et pour tout σ tel que $1 - \mathcal{H}\ell(\sigma) > 0$ par la relation*

$$\mathcal{L}(\sigma) = \frac{\ell(\sigma)}{1 - \mathcal{H}\ell(\sigma)}.$$

Le tableau suivant regroupe les valeurs de l'épaisseur de peau $\mathcal{L}(\sigma)$ sur l'interface $\Sigma^{\text{m}} \cap \{r = r_0\}$ où $\mathcal{H} = \frac{1}{2}$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

σ	5	20	80
$\mathcal{L}(\sigma)$ (cm)	10.86	5.29	2.61

Démonstration de la Proposition 8.13

PREUVE. D'après (8.19), la relation suivante fait le lien entre la composante orthoradiale H_θ et composante tangentielle contravariante H^2 du champ magnétique

$$H_\theta = rH^2. \quad (8.24)$$

Or, le changement d'échelle dans la direction normale (4.11) s'écrit simplement

$$Y_3 = \frac{r_0 - r}{\delta} =: R \quad (8.25)$$

donc,

$$H_\theta = (r_0 - \delta R)H^2. \quad (8.26)$$

En substituant le développement asymptotique du champ magnétique tronqué aux premiers *profils* dans la relation (8.26), il vient

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{cd}} = r_0 \mathcal{H}_0^{\text{cd},2} \\ \mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{cd}} = r_0 \mathcal{H}_1^{\text{cd},2} - Y_3 \mathcal{H}_0^{\text{cd},2} \end{cases} \quad (8.27)$$

où $\mathcal{H}_{\theta,j}^{\text{cd}}$ sont les composantes orthoradiales des *profils* du champ magnétique. Or, on a démontré au chapitre 6 que pour tout $Y_3 \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^{\text{cd}}(., Y_3) &= \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} e^{-\lambda Y_3} \\ \mathcal{H}_1^{\text{cd}}(., Y_3) &= \left[\mathbf{H}_{\tau,1}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \frac{Y_3}{2} \left\{ 3b_{\sigma}^{\sigma} \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} - 2\mathbf{n} \times (b_{\beta}^{\sigma} (\mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_{\sigma} dy^{\beta})|_{\Sigma} \right\} \right] e^{-\lambda Y_3} \end{aligned}$$

voir (6.30) et (6.31), où $\mathbf{H}_{\tau,j}^{\text{is}} = (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_j^{\text{is}}) \times \mathbf{n}$ est la composante tangentielle du terme \mathbf{H}_j^{is} . Or,

$$\mathbf{n} \times (b_{\beta}^{\sigma} (\mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_{\sigma} dy^{\beta})|_{\Sigma} = (b_{\beta}^{\beta} \mathcal{H}_0^{\text{is},\alpha} - b_{\beta}^{\alpha} \mathcal{H}_0^{\text{is},\beta}) X_{\alpha} \quad (8.28)$$

où $\mathcal{H}_j^{\text{is},\alpha} := (\mathbf{H}_{\tau,j}^{\text{is}})^{\alpha}$. Donc, d'après les relations (8.22), il vient

$$\mathbf{n} \times (b_{\beta}^{\sigma} (\mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_{\sigma} dy^{\beta}) = 0 \quad \text{sur} \quad \Sigma.$$

Ainsi, d'après (8.22) et (8.27), pour tout $Y_3 \geq 0$ on a

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{cd}}(r_0 - Y_3) = \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} e^{-\lambda Y_3} \\ \mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{cd}}(r_0 - Y_3) = \left[\mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \frac{Y_3}{2r_0} \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} \right] e^{-\lambda Y_3} \end{cases} \quad (8.29)$$

Donc, d'après (8.23)

$$\mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta)(r_0 - Y_3) = \left(\mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \delta \mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \frac{\delta}{2r_0} Y_3 \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} \right) e^{-\lambda Y_3} \quad \text{si} \quad Y_3 \geq 0. \quad (8.30)$$

D'où,

$$\log_{10} |\mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta)(r_0 - Y_3)| = \log_{10} |e^{-\lambda Y_3}| + \log_{10} \left| \left(\mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}} + \delta \mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{is}} \right)|_{\Sigma} + \frac{\delta}{2r_0} Y_3 \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} \right|.$$

Or,

$$\log_{10} |e^{-\lambda Y_3}| = -\frac{1}{\ln 10} \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} (r_0 - r)$$

et

$$\log_{10} \left| \left(\mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}} + \delta \mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{is}} \right)|_{\Sigma} + \frac{\delta}{2r_0} Y_3 \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} \right| = \log_{10} |\mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma}| + \log_{10} \left| 1 + \delta \left(\frac{Y_3}{2r_0} + \frac{\mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{is}}|_{\Sigma}}{\mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma}} \right) \right|.$$

Par un développement limité en δ , il vient

$$\log_{10} \left| 1 + \delta \left(\frac{Y_3}{2r_0} + \frac{\mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{is}}|_{\Sigma}}{\mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma}} \right) \right| = \frac{1}{\ln 10} \left(\frac{y_3}{2r_0} + \delta \frac{\mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{is}}|_{\Sigma}}{\mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma}} \right) + \mathcal{O}(\delta, y_3).$$

On en déduit la proposition 8.13. ■

Le tableau suivant fournit les valeurs de $\delta(\sigma)$ (en cm) et de $\alpha(\sigma)$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

σ	5	20	80
$\delta(\sigma)$	0,728366	0,364183	0,182091
$\alpha(\sigma)$	-3,999040	-8,215227	-16,647601

Remarque 8.15 Si on choisit comme approximation du champ magnétique son développement asymptotique tronqué à l'ordre 2, on note $H_2^{\text{cd}}(\delta) = \mathcal{H}_0^{\text{cd}} + \delta \mathcal{H}_1^{\text{cd}} + \delta^2 \mathcal{H}_2^{\text{cd}}$ sa composante surfacique. En particulier, sa composante orthoradiale $H_{\theta,2}^{\text{cd}}(\delta) = \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{cd}} + \delta \mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{cd}} + \delta^2 \mathcal{H}_{\theta,2}^{\text{cd}}$. On a démontré au chapitre 5 qu'il existe des fonctions $d_2^\beta(x_\alpha)$, $\beta = 1, 2$ telles que

$$\mathcal{H}_2^{\text{cd}}(., Y_3) = e^{-\lambda Y_3} \left[\mathcal{H}_2^{\text{is}}|_{\Sigma} + d_2^1 Y_3 + d_2^2 Y_3^2 \right] \quad \text{si } Y_3 \geq 0.$$

Ainsi,

$$H_{\theta,2}^{\text{cd}}(\delta)(r_0 - Y_3) = (a_0(\delta) + a_1(\delta)Y_3 + a_2(\delta)Y_3^2) e^{-\lambda Y_3}$$

où

$$\begin{cases} a_0(\delta) = \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \delta \mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \delta^2 \mathcal{H}_{\theta,2}^{\text{is}}(., 0) \\ a_1(\delta) = \frac{\delta}{2r_0} \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \delta^2 d_2^1 \\ a_2(\delta) = \delta^2 d_2^2 \end{cases}$$

Pour tout $Y_3 \geq 0$, on a

$$\log_{10} |H_{\theta,2}^{\text{cd}}(\delta)(r_0 - Y_3)| = \log_{10} |e^{-\lambda Y_3}| + \log_{10} |a_0(\delta)| + \log_{10} \left| 1 + \frac{a_1}{a_0}(\delta)Y_3 + \frac{a_2}{a_0}(\delta)Y_3^2 \right|.$$

Soit

$$x(\delta) = \frac{a_1}{a_0}(\delta)Y_3 + \frac{a_2}{a_0}(\delta)Y_3^2.$$

Par un développement limité lorsque $\delta \rightarrow 0$, il vient

$$\log_{10} |1 + x(\delta)| = \frac{1}{\ln 10} \left[\frac{1}{2r_0}(r_0 - r) + \frac{d_2^2}{\mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma}}(r_0 - r)^2 + \mathcal{O}(\delta, r_0 - r) \right].$$

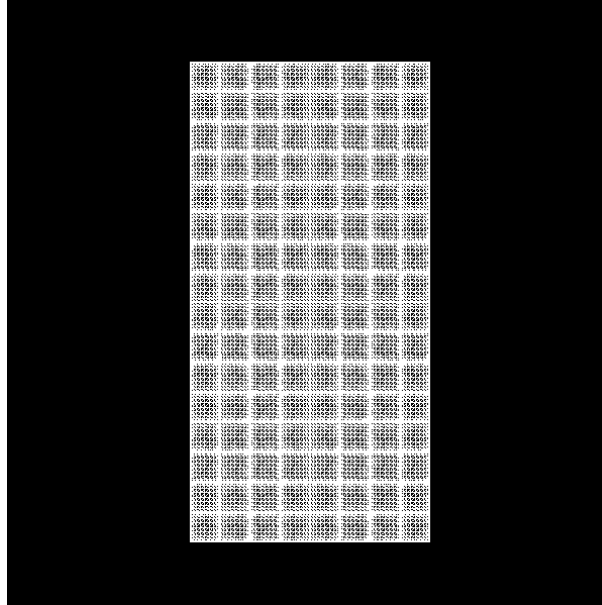
Ainsi, $\alpha(\sigma)$ est encore une approximation de la pente de $\log_{10} |H_{\theta,2}^{\text{cd}}(\delta)(r_0 - Y_3)|$ par rapport à $(r_0 - r)$.

8.3.2 Simulations numériques

Les calculs numériques en configuration cylindrique sont effectués pour $r_0 = h_0 = 1$ m et $r_1 = h_1 = 2$ m, voir la Figure 2.

Maillage carré du domaine méridien Ω^m

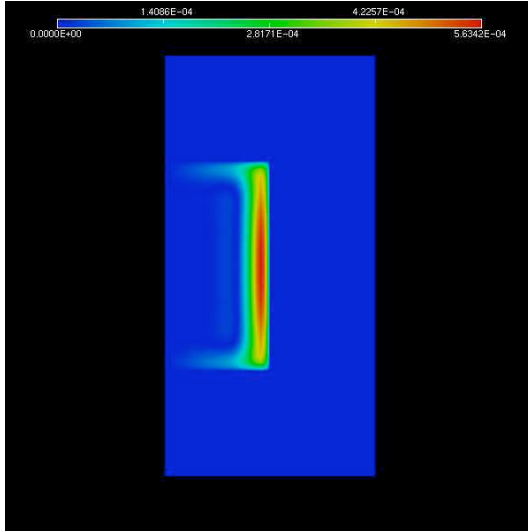
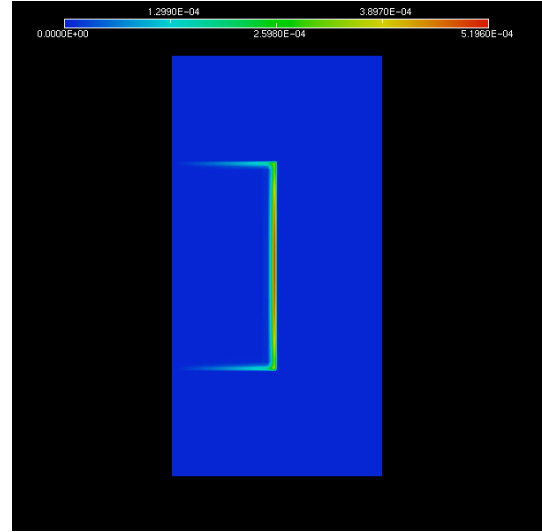
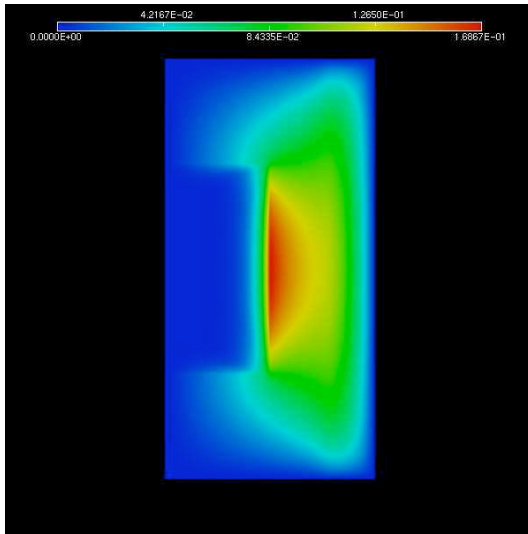
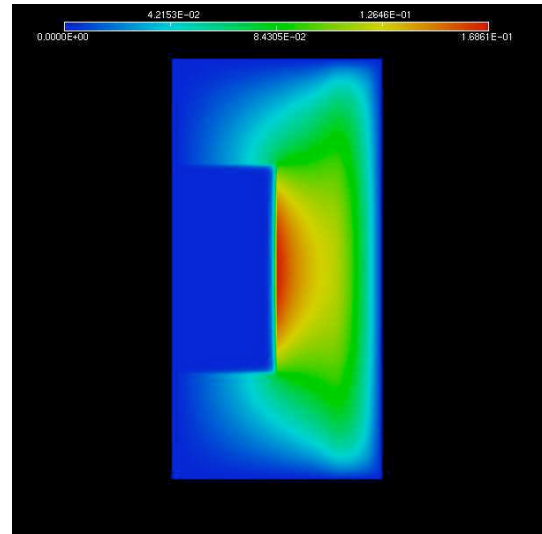
On a maillé les sous-domaines Ω_{cd}^m et Ω_{is}^m avec des carrés, voir la figure ci-dessous. Il s'agit d'un maillage en 128 quadrangles pour le domaine méridien Ω^m , dont 32 quadrangles pour le sous-domaine Ω_{cd}^m .



Maillage du domaine méridien Ω^m en 128 quadrangles

Sur le maillage rectangulaire dans le domaine méridien Ω^m contenu dans le demi-plan (r, z) , on utilise les éléments finis Q10 disponibles dans la bibliothèque éléments finis Mélina, voir [45]. On utilise une méthode de discrétisation de Galerkin pour approcher la solution H_δ du problème (8.15). La solution numérique est calculée à l'aide d'une interpolation Q10 dans le plan $\theta = 0$ aux points de Gauss-Lobatto (formule de quadrature de degré 21).

Le code numérique utilisé pour résoudre le problème (8.15) est issu de [10]. Tous les calculs numériques sont effectués pour une pulsation $\omega = 3.10^7$ Hz. On note H_σ la solution numérique calculée pour σ donné.

 $|\text{Im } H_\sigma|$ pour $\sigma = 5 \text{ S.m}^{-1}$  $|\text{Im } H_\sigma|$ pour $\sigma = 80 \text{ S.m}^{-1}$  $|H_\sigma|$ pour $\sigma = 5 \text{ S.m}^{-1}$  $|H_\sigma|$ pour $\sigma = 80 \text{ S.m}^{-1}$

Post-traitement des résultats numériques

On extrait à présent les valeurs du module de H_σ aux points d'interpolations de Gauss-Lobatto le long des arêtes du maillage carré de Ω_{cd}^m pour $z = 0$ (théorie sans coins) et $r \in [0, 1]$, ce qui correspond à 41 valeurs de H_σ pour 4 arêtes du maillage. On trace ensuite le logarithme décimal du module de H_σ par rapport à $y_3 = 1 - r$ avec le logiciel MATLAB. On effectue enfin une régression linéaire à partir des 41 valeurs de H_σ . On a

$$\log_{10} |H_\sigma(\cdot, y_3)| \simeq a(1 - r) + b$$

et on appelle $p(\sigma)$ le coefficient directeur a de cette droite. On rappelle que les calculs ont tous été effectués pour $\omega = 3.10^7$ Hz. Le tableau suivant regroupe les valeurs de $p(\sigma)$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

σ	5	20	80
$p(\sigma)$	-3,9444	-7,9629	-14,2476

Pour comparer cette pente $p(\sigma)$ avec une approximation de la pente théorique $\alpha(\sigma)$ (obtenue en tronquant le développement asymptotique en champ magnétique aux deux premiers termes), on définit le pourcentage d'erreur $err(\sigma)$ entre les pentes théoriques $\alpha(\sigma)$ et numériques $p(\sigma)$ de la façon suivante :

$$err(\sigma) = \frac{|\alpha(\sigma) - p(\sigma)|}{|\alpha(\sigma)|}.$$

Le tableau suivant fournit les valeurs de $err(\sigma)$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

σ	5	20	80
$err(\sigma)$ en %	1,37	3,07	14,42

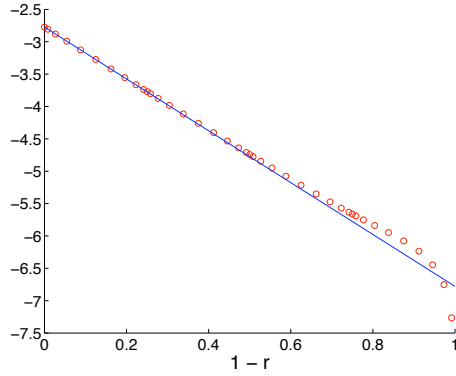
On note $n(\sigma)$ le nombre de points d'interpolations de Gauss-Lobatto dans l'épaisseur de peau $\ell(\sigma)$. On effectue une régression linéaire à partir des valeurs du logarithme décimal du module de H_σ aux points de Gauss-Lobatto dans l'épaisseur de peau $\ell(\sigma)$. Le tableau suivant regroupe les valeurs de $\ell(\sigma)$ et $n(\sigma)$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

σ	5	20	80
$\ell(\sigma)$ (cm)	10,3	5,15	2,58
$n(\sigma)$	5	3	2

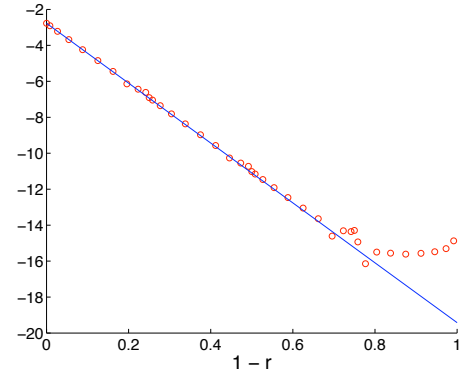
Le tableau suivant donne les valeurs des pentes numériques $pente(\sigma)$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$, calculées à l'aide d'une régression linéaire à partir de $n(\sigma)$ valeurs de $\log_{10} |H_\sigma(1-r)|$ correspondant aux points d'interpolation de Gauss-Lobatto dans l'épaisseur de peau $\ell(\sigma)$, voir les figures ci-dessous.

σ	5	20	80
$pente(\sigma)$	-4,0056	-8,22	-16,6505

Sur les figures ci-dessous, et pour $\sigma \in \{5, 80\}$, on a tracé en rond les valeurs extraites de $\log_{10} |H_\sigma(1-r)|$ et les régressions linéaires associées de pentes $pente(\sigma)$.



○ : $\log_{10} |H_\sigma(1-r)|$ pour $\sigma = 5$
 pente(σ) = -4,0056



○ : $\log_{10} |H_\sigma(1-r)|$ pour $\sigma = 80$
 pente(σ) = -16,6505

On définit à nouveau un pourcentage d'erreur $erreur(\sigma)$ par

$$erreur(\sigma) = \frac{|\alpha(\sigma) - pente(\sigma)|}{|\alpha(\sigma)|}.$$

Le tableau suivant fournit les valeurs de $erreur(\sigma)$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

σ	5	20	80
$erreur(\sigma)$ (en %)	0,16	0,058	0,017

Remarque 8.16 L'erreur relative $err(80) = 14,42\%$ est élevée par comparaison avec l'erreur relative $erreur(80) = 0,017\%$, voir les tableaux ci-dessus. Ceci est dû au fait que parmi les 41 valeurs extraites de $\log_{10} |H_\sigma(\cdot, 1-r)|$ pour calculer la pente $p(\sigma)$, les valeurs correspondantes à $1-r \geq 0.7$ sont de l'ordre de -16 , ce qui correspond au 0 précision machine (il s'agit de la condition de Dirichlet sur l'axe Γ_0), voir la figure de droite ci-dessus où on a tracé une régression linéaire de pente $pente(\sigma)$ pour les $n(\sigma = 80) = 2$ valeurs extraites de $\log_{10} |H_\sigma(\cdot, 1-r)|$ au voisinage de l'interface.

8.3.3 Remarque sur l'influence de la géométrie de l'interface

Soit

$$\alpha_0(\sigma) = -\frac{1}{\ln 10} \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}}.$$

Le tableau suivant fournit les valeurs de $\alpha_0(\sigma)$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

σ	5	20	80
$\alpha_0(\sigma)$	-4,2162	-8,4324	-16,8647

Soit $err_0(\sigma)$ l'erreur définie par

$$err_0(\sigma) = \frac{|\alpha_0(\sigma) - pente(\sigma)|}{|\alpha_0(\sigma)|}.$$

Le tableau suivant fournit les valeurs de $err_0(\sigma)$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$:

σ	5	20	80
$err_0(\sigma)$ (en %)	4,92	2,52	2,52

Ainsi, la pente théorique $\alpha(\sigma)$ dépendant de la géométrie de l'interface Σ est une meilleure approximation de la pente numérique $pente(\sigma)$ que la pente théorique $\alpha_0(\sigma)$.

8.4 Géométrie sphérique

On suppose dans ce paragraphe que Ω_{cd} et Ω sont deux boules coaxiales, de rayons respectifs ρ_0 et ρ_1 . Les domaines méridiens correspondants sont des demi-disques coaxiaux de rayons respectifs ρ_0 et ρ_1 , voir la Figure 3 ci-dessous.

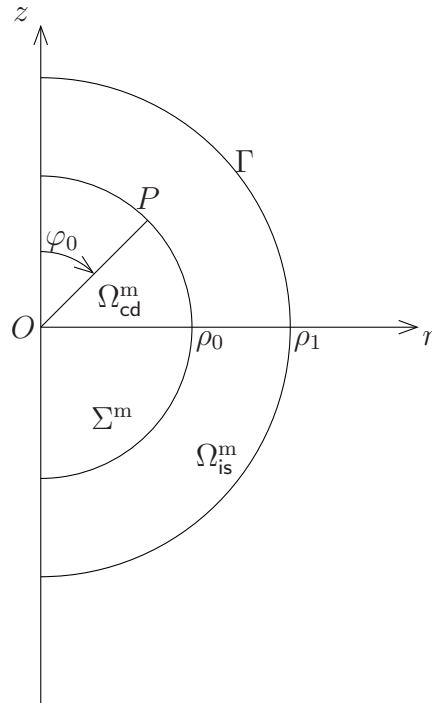


Figure 3 – Le domaine méridien Ω^m

On note (ρ, θ, φ) les coordonnées sphériques et $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ la base de vecteurs coordonnés associés aux coordonnées sphériques : en particulier, on a

$$\vec{e}_\rho = (\sin \varphi \cos \theta, \sin \varphi \sin \theta, \cos \varphi),$$

et

$$\vec{e}_\varphi = (\cos \varphi \cos \theta, \cos \varphi \sin \theta, -\sin \varphi).$$

Soit $(y_\alpha) := (\varphi, \theta)$ un système de coordonnées locales sur l'interface Σ . Ce système induit une paramétrisation F de Σ , donnée par

$$F(\varphi, \theta) = (\rho_0 \sin \varphi \cos \theta, \rho_0 \sin \varphi \sin \theta, \rho_0 \cos \varphi).$$

On définit un voisinage tubulaire de Σ dans Ω_{cd} comme l'image \mathcal{O} de l'application

$$(F(\varphi, \theta), h) \mapsto F(\varphi, \theta) + h \mathbf{n}(F(\varphi, \theta))$$

de $\Sigma \times (0, \rho_0)$ dans \mathbb{R}^3 . Au voisinage des points de coordonnées sphériques $(\varphi, \theta, \rho_0)$ dans \mathcal{O} , où $\varphi \in (0, \pi)$ et $\theta \in \mathbb{T}$, on a ainsi un *système de coordonnées normales*

$$(y_\alpha, h) = (\varphi, \theta, h) \quad \text{où} \quad h = \rho_0 - \rho,$$

voir le chapitre 3, où

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

Les vecteurs de base associés à cette paramétrisation sont les suivants

$$X_1 = \rho \vec{e}_\varphi, \quad X_2 = \rho \sin \varphi \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad X_3 = -\vec{e}_\rho.$$

La métrique sur \mathcal{O} dans ce *système de coordonnées normales*, où $h = \rho_0 - \rho$ est définie par

$$(g_{ij}(h)) = \begin{pmatrix} \rho^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule le tenseur de courbure $b_{\alpha\beta}(h)$ à partir de la relation (3.11). Dans ces coordonnées normales $(\varphi, \theta; h = \rho_0 - \rho)$, il vient :

$$b_{\alpha\beta}(h) = \frac{1}{2} \partial_\rho g_{\alpha\beta}(h), \quad (8.31)$$

On en déduit les coefficients du tenseur de courbure $b_{\alpha\beta}(h)$ associé à la variété Σ_h .

Proposition 8.17 *Pour tout $h \in [0, \rho_0]$ tel que $h = \rho_0 - \rho$, on a*

$$\begin{aligned} b_{11}(h) &= \rho \\ b_{22}(h) &= \rho \sin^2 \varphi \\ b_{12}(h) &= b_{21}(h) = 0 \end{aligned} \quad (8.32)$$

En utilisant l'inverse du tenseur métrique pour faire monter les indices, on en déduit l'expression des courbures principales $b_1^1(h)$ et $b_2^2(h)$ de la variété $\Sigma_h = \{y_3 = h\}$. Ceci fait l'objet de la proposition suivante.

Proposition 8.18 *Pour tout $h \in [0, \rho_0)$ tel que $h = \rho_0 - \rho$, on a*

$$\begin{aligned} b_1^1(h) &= \frac{1}{\rho} \\ b_2^2(h) &= \frac{1}{\rho} \\ b_1^2(h) &= b_2^1(h) = 0 \end{aligned} \tag{8.33}$$

Ainsi, les courbures principales sur l'interface $\Sigma = \{h = 0\}$ sont les suivantes

$$b_1^1 = b_2^2 = \frac{1}{\rho_0}. \tag{8.34}$$

En particulier, la courbure moyenne \mathcal{H} de l'interface est constante :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\rho_0}.$$

8.4.1 Résultats théoriques

On choisit encore comme approximation du champ magnétique son développement asymptotique tronqué à l'ordre 1, et on note $H_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta)$ sa composante orthoradiale, voir le paragraphe 8.3.1 pour le cas d'une interface cylindrique. On calcule une approximation $\beta(\sigma)$ de la pente théorique de $\log_{10} |H_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta)|$ par rapport à $(\rho_0 - \rho)$ lorsque $\delta(\sigma) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma}} \rightarrow 0$. On rappelle que $\ell(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \sigma}}$ est l'épaisseur de peau.

Proposition 8.19 *Lorsque $\sigma \rightarrow \infty$ et $\rho_0 - \rho$ est assez petit, on a le développement*

$$\log_{10} |H_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta) (\rho_0 - \frac{\rho_0 - \rho}{\delta(\sigma)})| = C + \beta(\sigma)(\rho_0 - \rho) + \mathcal{O}(\delta, \rho_0 - \rho),$$

où

$$\beta(\sigma) = \frac{1}{\ln 10} \left(\mathcal{H} - \frac{1}{\ell(\sigma)} \right),$$

$\mathcal{H} = \frac{1}{\rho_0}$ est la courbure moyenne de l'interface $\Sigma^{\text{m}} \cap \{\rho = \rho_0\}$ et $C = \log_{10} |\mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma}|$.

PREUVE. On note $H_1^{\text{cd}} = \mathcal{H}_0^{\text{cd}} + \delta \mathcal{H}_1^{\text{cd}}$ la composante surfacique du développement asymptotique du champ magnétique tronqué à l'ordre 1. En particulier, sa composante orthoradiale $H_{\theta,1}^{\text{cd}} = \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{cd}} + \delta \mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{cd}}$, avec $Y_3 = \frac{\rho_0 - \rho}{\delta}$. On a

$$\mathcal{H}_{\theta}^{\text{cd}} = (\rho_0 - \delta Y_3) \sin \varphi \mathcal{H}^{\text{cd},2}.$$

En substituant les premiers termes du développement asymptotique du champ magnétique dans la relation précédente, il vient

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{cd}} = \rho_0 \sin \varphi \mathcal{H}_0^{\text{cd},2} \\ \mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{cd}} = \rho_0 \sin \varphi \mathcal{H}_1^{\text{cd},2} - \sin \varphi Y_3 \mathcal{H}_0^{\text{cd},2} \end{cases}$$

Or, on a démontré au chapitre 6 que pour tout $Y_3 \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0^{\text{cd}}(., Y_3) &= \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} e^{-\lambda Y_3} \\ \mathcal{H}_1^{\text{cd}}(., Y_3) &= \left[\mathbf{H}_{\tau,1}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \frac{Y_3}{2} \left\{ 3b_{\sigma}^{\sigma} \mathbf{H}_{\tau,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} - 2\mathbf{n} \times (b_{\beta}^{\sigma} (\mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_{\sigma} dy^{\beta})|_{\Sigma} \right\} \right] e^{-\lambda Y_3} \end{aligned}$$

voir (6.30) et (6.31). Donc, d'après (8.28), (8.33) et (8.34), il vient

$$\mathbf{n} \times (b_{\beta}^{\sigma} (\mathbf{H}_0^{\text{is}} \times \mathbf{n})_{\sigma} dy^{\beta}) = \frac{1}{\rho_0} \mathcal{H}_0^{\text{is},1}|_{\Sigma} X_1 + \frac{1}{\rho_0} \mathcal{H}_0^{\text{is},2}|_{\Sigma} X_2.$$

On en déduit, pour tout $Y_3 \geq 0$

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{cd}}(\rho_0 - Y_3) = \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}(\rho_0) e^{-\lambda Y_3} \\ \mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{cd}}(\rho_0 - Y_3) = [\mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{is}}(\rho_0) + \frac{Y_3}{\rho_0} \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}(\rho_0)] e^{-\lambda Y_3} \end{cases} \quad (8.35)$$

où $\mathcal{H}_{\theta,j}^{\text{is}}(\rho_0) = \rho_0 \sin \varphi \mathcal{H}_j^{\text{is},2}|_{\Sigma}$, puis

$$\mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta)(\rho_0 - Y_3) = (\mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \delta \mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \frac{\delta}{\rho_0} Y_3 \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma}) e^{-\lambda Y_3}$$

d'où,

$$\log_{10} |\mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta)(\rho_0 - Y_3)| = \log_{10} |e^{-\lambda Y_3}| + \log_{10} \left| \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \delta \mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \frac{\delta}{\rho_0} Y_3 \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} \right|.$$

Or, pour tout $Y_3 \geq 0$

$$\log_{10} |e^{-\lambda Y_3}| = -\frac{1}{\ln 10} \frac{1}{\ell(\sigma)} (\rho_0 - \rho)$$

et par un développement limité en $\rho_0 - \rho$ et en δ , il vient

$$\begin{aligned} \log_{10} |\mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \delta \mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \frac{\delta}{\rho_0} Y_3 \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} &= \\ \log_{10} |\mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \frac{1}{\ln 10} \frac{1}{\rho_0} \left[1 - \delta \frac{\mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{is}}|_{\Sigma}}{\mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma}} \right] (\rho_0 - \rho) &+ \mathcal{O}(\delta, \rho_0 - \rho). \end{aligned}$$

On en déduit la proposition car la courbure moyenne de l'interface $\mathcal{H} = \frac{1}{\rho_0}$.

Remarque 8.20 *Plus généralement, pour un système métrique orthogonal, et pour tout $Y_3 \geq 0$, on a*

$$H_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta)(\rho_0 - Y_3) = [\mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \delta \mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \frac{Y_3}{2} b_{\alpha}^{\alpha} \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma}] e^{-\lambda Y_3}$$

et donc

$$\beta(\sigma) = \frac{1}{\ln 10} \left(\mathcal{H} - \frac{1}{\ell(\sigma)} \right).$$

■

Le tableau suivant fournit les valeurs de $\beta(\sigma)$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$ et $\rho_0 = 1$.

σ	5	20	80
$\beta(\sigma)$	-3,781893	-7,998080	-16,430454

Le tableau suivant regroupe les valeurs de l'épaisseur de peau $\mathcal{L}(\sigma)$, voir la définition 8.14, lorsque $\mathcal{H} = 1$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

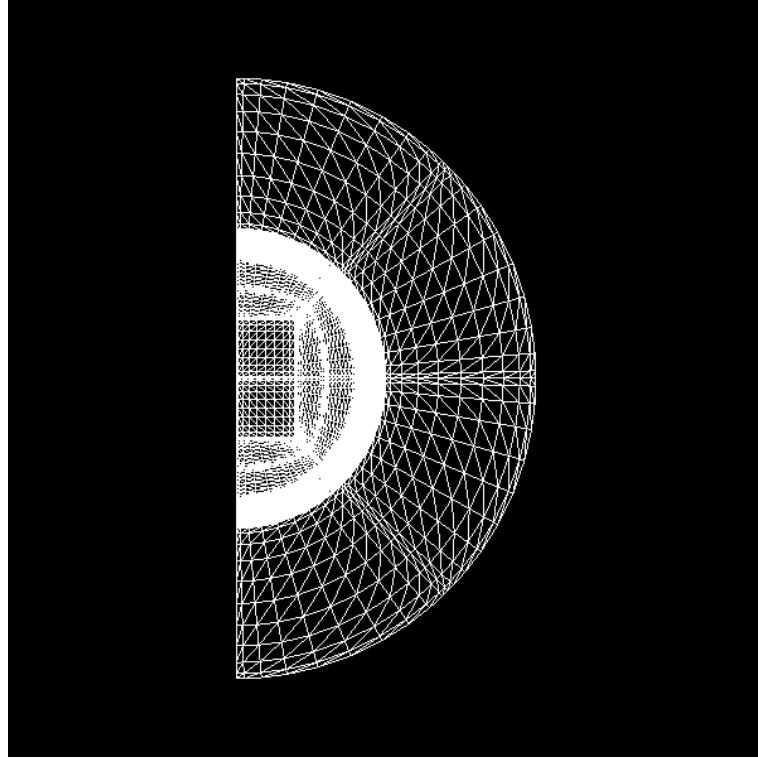
σ	5	20	80
$\mathcal{L}(\sigma) (cm)$	11.48	5.43	2.64

8.4.2 Simulations numériques

Les calculs numériques en configuration sphérique sont effectués pour $\rho_0 = 1$ et $\rho_1 = 2$, voir la Figure 3 ci-dessus. Le domaine Ω_{cd} est une boule de rayon $\rho_0 = 1 m$ et Ω est une boule de rayon $\rho_1 = 2 m$.

Maillage du domaine méridien Ω^{m} raffiné dans un voisinage tubulaire de l'interface Σ^{m} dans le domaine conducteur

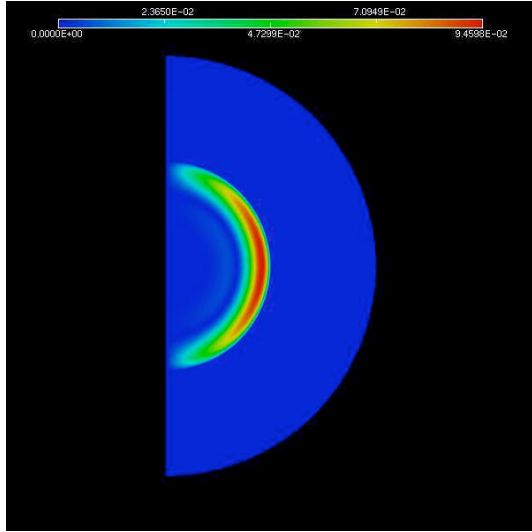
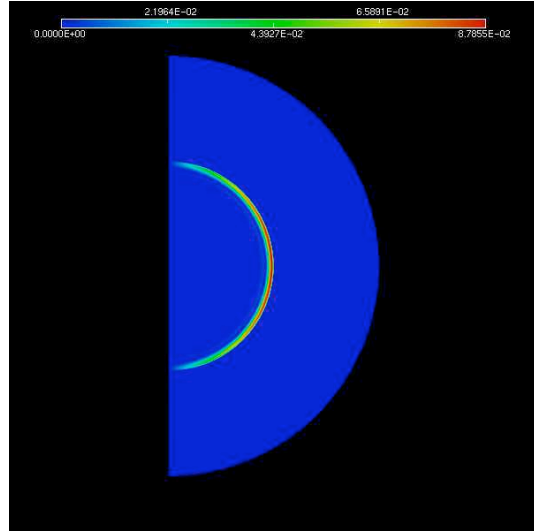
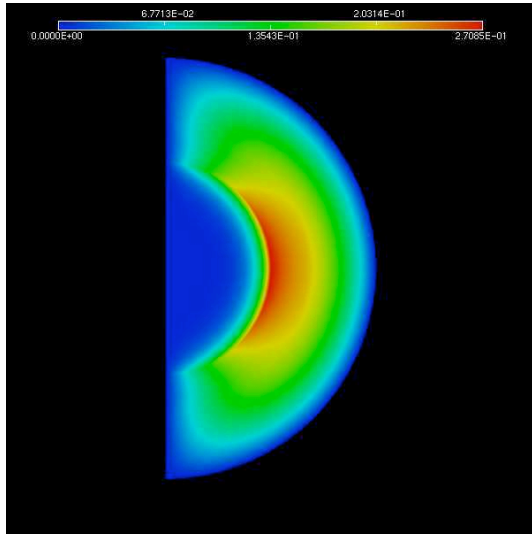
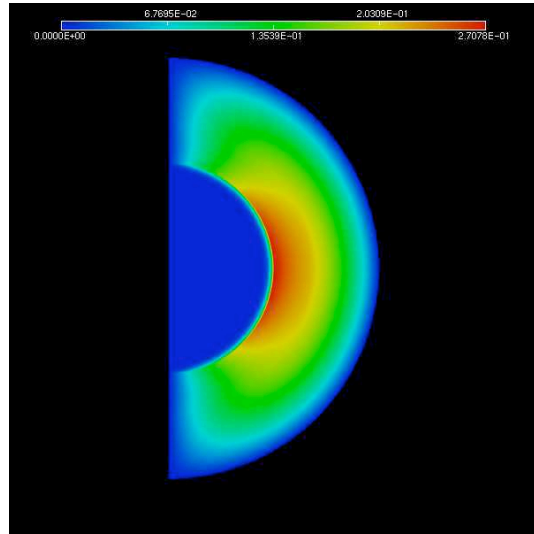
On utilise dans la suite un maillage conforme en quadrangles des sous-domaines $\Omega_{\text{cd}}^{\text{m}}$ et $\Omega_{\text{is}}^{\text{m}}$. Le maillage du domaine méridien $\Omega_{\text{cd}}^{\text{m}}$ est raffiné dans un voisinage de l'interface, voir la figure ci-dessous.



Maillage du domaine méridien Ω^m en 30 quadrangles

Sur ce maillage, on utilise les éléments finis Q10 disponibles dans la bibliothèque éléments finis Mélima, voir [45]. On utilise une méthode de discrétisation de Galerkin pour approcher la solution H_δ du problème (8.15). La solution numérique est calculée à l'aide d'une interpolation Q10 dans le plan $\theta = 0$ aux points de Gauss-Lobatto (formule de quadrature de degré 21), voir le paragraphe 8.3.

On rappelle que le code numérique utilisé pour résoudre le problème (8.15) est issu de [10]. Tous les calculs numériques sont effectués pour une pulsation $\omega = 3.10^7$ Hz. On note H_σ la solution numérique calculée pour σ donné.


 $|\text{Im } H_\sigma|$ pour $\sigma = 5 \text{ S.m}^{-1}$

 $|\text{Im } H_\sigma|$ pour $\sigma = 80 \text{ S.m}^{-1}$

 $|H_\sigma|$ pour $\sigma = 5 \text{ S.m}^{-1}$

 $|H_\sigma|$ pour $\sigma = 80 \text{ S.m}^{-1}$

Post-traitement numérique

On effectue des régressions linéaires à partir des valeurs extraites du logarithme décimal du module de H_σ aux points d'interpolations de Gauss-Lobatto respectivement dans des épaisseurs de peau $\ell(\sigma) = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}}$ et $e(\sigma) := \sqrt{\frac{1}{\omega\mu_0\sigma}}$.

Remarque 8.21 Dans un modèle unidimensionnel de l'effet de peau où le conducteur

de conductivité σ est modélisé par un demi-espace, l'épaisseur de peau $e(\sigma)$ définie par

$$e(\sigma) = \frac{1}{\sqrt{\omega\mu_0\sigma}}$$

est la distance à l'interface plane pour laquelle l'amplitude de l'onde plane électromagnétique a diminué d'un facteur 2 par rapport à son amplitude à l'interface.

Le tableau suivant regroupe les valeurs de $e(\sigma)$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

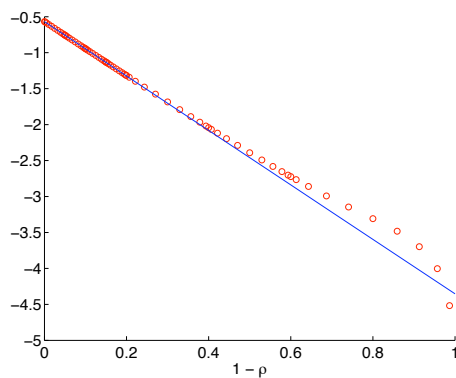
σ	5	20	80
$e(\sigma)$	7,28	3,64	1,82

Cas $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

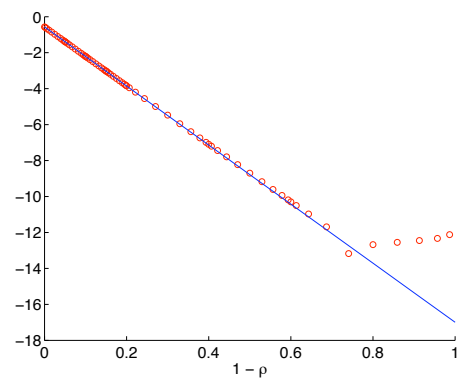
Le tableau suivant donne le nombre $n(\sigma)$ de valeurs extraites du logarithme décimal du module de H_σ dans une épaisseur de peau $\ell(\sigma)$. Une régression linéaire de ces $n(\sigma)$ valeurs fournit la pente numérique $pente(\sigma)$ associée à $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

σ	5	20	80
$n(\sigma)$	22	11	5
$pente(\sigma)$	-3,776786	-7,996546	-16,427919

On rappelle que sur l'axe $z = 0$, on a $\rho = r$. Sur les figures ci-dessous, et pour $\sigma \in \{5, 80\}$, on a tracé en rond les valeurs extraites de $\log_{10} |H_\sigma(1 - \rho)|$ et les régressions linéaires associées de pentes $pente(\sigma)$.



○ : $\log_{10} |H_\sigma(1 - \rho)|$ pour $\sigma = 5$
 $pente(\sigma) = -3,7768$



○ : $\log_{10} |H_\sigma(1 - \rho)|$ pour $\sigma = 80$
 $pente(\sigma) = -16,4286$

On définit l'erreur $erreur(\sigma)$ par

$$erreur(\sigma) = \frac{|\beta(\sigma) - pente(\sigma)|}{|\beta(\sigma)|}.$$

Le tableau suivant fournit les valeurs de $erreur(\sigma)$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$:

σ	5	20	80
$erreur(\sigma)$ (en %)	0,14	0,019	0,017

Le tableau suivant donne le nombre $ne(\sigma)$ de valeurs du module de H_σ extraites correspondant à l'épaisseur de peau $e(\sigma)$ et les pentes numériques $pe(\sigma)$ associées à $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

σ	5	20	80
$ne(\sigma)$	15	7	5
$pe(\sigma)$	-3,785681	-8,001001	-16,427918

On définit l'erreur $err_e(\sigma)$ par

$$err_e(\sigma) = \frac{|\beta(\sigma) - pe(\sigma)|}{|\beta(\sigma)|}.$$

Le tableau suivant fournit les valeurs de $err_e(\sigma)$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$:

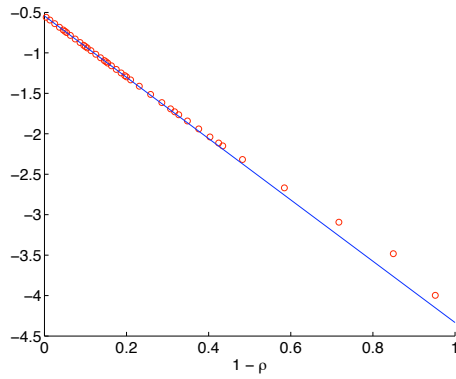
σ	5	20	80
$err_e(\sigma)$ (en %)	0,1	0,036	0,015

Cas $\varphi_0 = \frac{\pi}{4}$

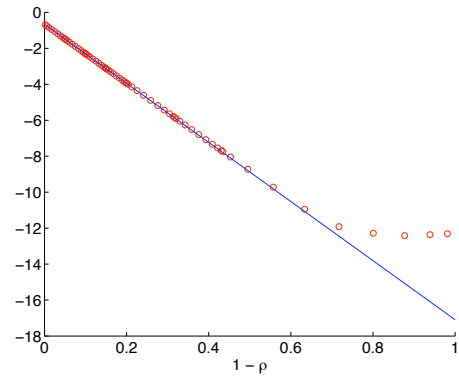
Le tableau suivant donne le nombre $n(\sigma)$ de valeurs du module de H_σ extraites et les pentes numériques $pente(\sigma)$ associées à $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

σ	5	20	80
$n(\sigma)$	21	10	5
$pente(\sigma)$	-3,788706	-8,001051	-16,432526

On rappelle qu'ici, on a $\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$. Sur les figures ci-dessous, et pour $\sigma \in \{5, 80\}$, on a tracé en rond les valeurs extraites de $\log_{10} |H_\sigma(1 - \rho)|$ et les régressions linéaires associées de pentes $pente(\sigma)$.



○ : $\log_{10} |H_\sigma(1 - \rho)|$ pour $\sigma = 5$
 $\text{pente}(\sigma) = -3.7888$



○ : $\log_{10} |H_\sigma(1 - \rho)|$ pour $\sigma = 80$
 $\text{pente}(\sigma) = -16,4325$

On définit l'erreur $\text{erreur}(\sigma)$ entre la pente numérique $\text{pente}(\sigma)$ et la pente théorique $\beta(\sigma)$ par

$$\text{erreur}(\sigma) = \frac{|\beta(\sigma) - \text{pente}(\sigma)|}{|\beta(\sigma)|}.$$

Le tableau suivant fournit les valeurs de $\text{erreur}(\sigma)$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

σ	5	20	80
$\text{erreur}(\sigma)$ (en %)	0,18	0,037	0,013

Le tableau suivant donne le nombre $n2(\sigma)$ de valeurs du module de H_σ extraites correspondant à l'épaisseur de peau $e(\sigma)$ et les pentes numériques $p2(\sigma)$ associées à $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

σ	5	20	80
$n2(\sigma)$	14	6	4
$p2(\sigma)$	-3,797137	-8,004976	-16,435909

On définit l'erreur $\text{err}_2(\sigma)$ par

$$\text{err}_2(\sigma) = \frac{|\beta(\sigma) - p2(\sigma)|}{|\beta(\sigma)|}.$$

Le tableau suivant fournit les valeurs de $\text{err}_2(\sigma)$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$:

σ	5	20	80
$\text{err}_2(\sigma)$ (en %)	0,4	0,086	0,033

Calcul de l'erreur $err(\sigma)/\delta^2(\sigma)$ pour $\varphi = \frac{\pi}{4}$

On compare les erreurs entre pentes numériques et théoriques par rapport à δ^2 . On choisit pour cela d'extraire un nombre $n(\sigma)$ de valeurs du module de h similaires pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$. On choisit une interpolation Q6 pour $\sigma = 5$, Q8 pour $\sigma = 20$ et Q10 pour $\sigma = 80$. Le tableau suivant donne le nombre $n(\sigma)$ de valeurs du module de h extraites dans l'épaisseur de peau $e(\sigma)$ associée à $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

σ	5	20	80
$n(\sigma)$	8	5	4
$p2(\sigma)$	-3,797137	-8,004976	-16,435909

Pour comparer les différentes erreurs relatives aux pentes par rapport, on choisit pour chaque $\sigma \in \{5, 20, 80\}$ les 4 valeurs du module de h en les noeuds les plus proches de l'interface dans l'épaisseur de peau $e(\sigma)$. Le tableau suivant donne les pentes numériques $p(\sigma)$, les valeurs de $err(\sigma)$ et de $\frac{err(\sigma)}{\delta^2(\sigma)}$ associées à $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

σ	5	20	80
$p(\sigma)$	-3.8013	-8.0089	-16.4359
$err(\sigma)$	$5,14 \cdot 10^{-3}$	$1,35 \cdot 10^{-3}$	$3,3 \cdot 10^{-4}$
$\frac{err(\sigma)}{\delta^2(\sigma)}$	0,97	1,01	0,99

8.5 Géométrie ellipsoïdale

On suppose dans ce paragraphe que Ω_{cd} et Ω sont deux ellipsoïdes coaxiales aplatis, de demi-axes respectifs $a_0 = b_0$ et c_0 pour Ω_{cd} et $a_1 = b_1$ et c_1 pour Ω . Les domaines méridiens correspondants sont des demi-ellipses coaxiales de demi-axes respectifs a_0, c_0 et a_1, c_1 . On note (ρ, θ, φ) les coordonnées ellipsoïdales et $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ la base de vecteurs coordonnés associés aux coordonnées ellipsoïdales. En particulier, on a

$$\vec{e}_\varphi = (a_0 \cos \theta \cos \varphi, a_0 \sin \theta \cos \varphi, -c_0 \sin \varphi)$$

et

$$\vec{e}_\theta = (-a_0 \sin \theta \sin \varphi, a_0 \cos \theta \sin \varphi, 0).$$

Le système de coordonnées locales $(y_\alpha) = (\varphi, \theta)$ sur l'interface Σ induit une paramétrisation F de Σ , donnée par

$$F(\varphi, \theta) = (a_0 \cos \theta \sin \varphi, a_0 \sin \theta \sin \varphi, c_0 \cos \varphi).$$

Les vecteurs du plan tangent associés sont :

$$X_1 = -\vec{e}_\varphi, \quad \text{et} \quad X_2 = \vec{e}_\theta$$

et le vecteur normal X_3 se calcule à partir de la relation

$$X_3 = \frac{X_1 \times X_2}{\|X_1 \times X_2\|}.$$

Ainsi, on a

$$X_3 = -\frac{1}{\sqrt{c_0^2 \sin^2 \varphi + a_0^2 \cos^2 \varphi}} (c_0 \cos \theta \sin \varphi, c_0 \sin \theta \sin \varphi, a_0 \cos \varphi).$$

Dans la suite, on fixe $a_0 = 2$ m et $c_0 = 1$ m. La métrique sur Σ dans ce système de coordonnées locales est définie par

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 3 \cos^2 \varphi + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 \sin^2 \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On calcule le tenseur de courbure $b_{\alpha\beta}$ de l'interface Σ à partir de la relation

$$b_{\alpha\beta} = \left\langle \frac{\partial^2 F(\varphi, \theta)}{\partial \alpha \partial \beta}, X_3 \right\rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

En particulier, on a

$$b_{11} = \left\langle \frac{\partial X_1}{\partial \varphi}, X_3 \right\rangle_{\mathbb{R}^3} \quad \text{et} \quad b_{22} = \left\langle \frac{\partial X_2}{\partial \theta}, X_3 \right\rangle_{\mathbb{R}^3}.$$

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 8.22 *Les composantes non-nulles du tenseur de courbure $b_{\alpha\beta}$ de l'interface Σ sont*

$$b_{11}(\varphi) = \frac{2}{\sqrt{3 \cos^2 \varphi + 1}} \quad \text{et} \quad b_{22}(\varphi) = \frac{2 \sin^2 \varphi}{\sqrt{3 \cos^2 \varphi + 1}}.$$

Les courbures principales de l'interface Σ sont les suivantes

$$b_1^1(\varphi) = \frac{2}{(\sqrt{3 \cos^2 \varphi + 1})^3} \tag{8.36}$$

et

$$b_2^2(\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{3 \cos^2 \varphi + 1}}. \tag{8.37}$$

8.5.1 Résultats théoriques

On choisit comme approximation du champ magnétique son développement asymptotique tronqué à l'ordre 1 :

$$H_1^{\text{cd}}(\delta) = \mathcal{H}_0^{\text{cd}} + \delta \mathcal{H}_1^{\text{cd}}.$$

En particulier, sa composante orthoradiale s'écrit $H_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta) = \mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{cd}} + \delta \mathcal{H}_{\theta,1}^{\text{cd}}$. On calcule une approximation $\beta(\sigma, \varphi)$ de la pente théorique de $\log_{10} |H_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta)|$ par rapport à la coordonnée normale

$$h = \frac{\sqrt{1 + 3 \cos^2 \varphi}}{\sin \varphi} (2 \sin \varphi - r),$$

lorsque $\delta(\sigma) = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \omega}{\sigma}} \rightarrow 0$.

Proposition 8.23 *Lorsque $\sigma \rightarrow \infty$ et h est assez petit, on a le développement*

$$\log_{10} |H_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta)(\cdot, \frac{h}{\delta(\sigma)})| = C + \beta(\sigma, \varphi)h + \mathcal{O}(\delta, h),$$

où

$$\beta(\sigma, \varphi) = \frac{1}{\ln 10} \left(\mathcal{H}(\varphi) - \frac{1}{\ell(\sigma)} \right) \quad (8.38)$$

et $\mathcal{H}(\varphi) = \frac{1}{2} b_\alpha^\alpha(\varphi)$ est la courbure moyenne de Σ au point de coordonnée φ .

PREUVE. Par une preuve similaire à celle des propositions 8.13 et 8.19, on calcule un développement limité de $\log_{10} |H_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta)(\varphi, \frac{h}{\delta})|$ par rapport à h . Il vient

$$\log_{10} |H_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta)(\varphi, \frac{h}{\delta})| = \log_{10} |\mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_\Sigma + (\beta(\sigma, \varphi) + \mathcal{O}(\delta))h + \mathcal{O}(\delta, h). \quad (8.39)$$

■

Le tableau suivant fournit les valeurs de

$$\beta(\sigma, 0) = \frac{1}{\log(10)} \left(\mathcal{H}(0) - \frac{1}{\ell(\sigma)} \right) \quad (8.40)$$

où $\mathcal{H}(0) = \frac{5}{4}$, ainsi que celles de $\beta(\sigma, \varphi_0)$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$ et $\varphi_0 = \frac{\pi}{2} - t_0$, où $t_0 = \arctan(\frac{z_M}{r_M})$ et M est la projection orthogonale du point $P(1, \frac{1}{2})$ sur Σ :

σ	5	20	80
$\beta(\sigma, 0)$	-3,673319	-7,889506	-16,32188
$\beta(\sigma, \varphi_0)$	-4.073716	-8.2899	-16.722277

Le tableau suivant regroupe les valeurs de l'épaisseur de peau $\mathcal{L}(\sigma)$, voir la définition 8.14, lorsque $\mathcal{H} = \frac{5}{4}$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

σ	5	20	80
$\mathcal{L}(\sigma) \text{ (cm)}$	11.82	5.50	2.66

Soit $P \in (OL)$ le point de coordonnées (r, z) dans le quart de plan délimité par cette ellipse. Soit M sa projection orthogonale sur l'ellipse. M a pour coordonnées $(2 \sin \psi, \cos \psi)$ sur l'ellipse et on appelle (ψ, y_3) les coordonnées normales de $P \in (OL)$. Il existe un difféomorphisme Φ tel que localement, au voisinage de Σ , on a

$$(r, z) = \Phi(\psi, y_3).$$

Ainsi, $(\psi_L, 0) = (\pi/4, 0) = \Phi^{-1}(r_L, r_L/2)$ et au point $P(r, r/2)$, $(\psi, y_3) = \Phi^{-1}(r, r/2)$. On note à présent $h = r_L - r$. On effectue l'ansatz suivant

$$(r_L - h, (r_L - h)/2) = \Phi(\pi/4 + \beta h + O(h^2), \alpha h + O(h^2)). \quad (8.41)$$

On détermine à présent α et β . On a

$$\vec{MP} = y_3(P) \vec{N}(M)$$

où

$$\vec{N}(M) = -\nabla f(M) / \|\nabla f(M)\|,$$

et $f(M) = r_M^2/4 + z_M^2$ s'annule si $M(r_M, z_M)$ est un point de l'ellipse. Ainsi,

$$\begin{cases} r = \sin \psi (2 - \frac{1}{\sqrt{1+3 \cos^2 \psi}} y_3) \\ z = \cos \psi (1 - \frac{2}{\sqrt{1+3 \cos^2 \psi}} y_3) \end{cases} \quad (8.42)$$

D'après l'ansatz (8.41), il vient

$$\begin{cases} \sin \psi = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + \beta h) + O(h^2) \\ \cos \psi = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 - \beta h) + O(h^2) \\ \frac{1}{\sqrt{1+3 \cos^2 \psi}} = \sqrt{\frac{2}{5}} (1 + \frac{3}{5} \beta h) + O(h^2) \end{cases} \quad (8.43)$$

On substitue l'ansatz dans (8.42), et on effectue un développement limité (noté par les abréviations d.l. à présent) à l'ordre 1 en h . En identifiant les termes d'ordres h , il vient

$$\begin{cases} -1 = \sqrt{2} \beta - \frac{1}{\sqrt{5}} \alpha \\ -1 = -\sqrt{2} \beta - \frac{4}{\sqrt{5}} \alpha \end{cases} \quad (8.44)$$

d'où

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \beta = -\frac{3}{5\sqrt{2}} \end{cases} \quad (8.45)$$

D'après (8.39), afin d'obtenir un d.l de $\log_{10} |H_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta)(\varphi, \frac{h}{\delta})|$ à l'ordre 1 en h , il suffit de calculer un d.l de $\beta(\sigma, \psi)$ à l'ordre 0 en h , voir (8.38). On commence par effectuer un d.l des courbures principales, voir les relations (8.36) et (8.37) :

$$b_{\alpha}^{\alpha}(\psi) = \frac{a_0}{2} + O(h), \quad (8.46)$$

où $a_0 = \sqrt{\frac{2}{5} \frac{13}{10}}$. Ainsi, il vient

$$\beta(\sigma, \psi) = \frac{1}{\ln 10} \left(a_0 - \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} \right) + O(h).$$

Or, d'après (8.39), on a

$$\log_{10} |H_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta)(\varphi, \frac{h}{\delta})| = \log_{10} |\mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \log_{10} |\sin \varphi| + (\beta(\sigma, \varphi) + \mathcal{O}(\delta))h + \mathcal{O}(\delta, h).$$

Donc,

$$\begin{aligned} \log_{10} |H_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta)(\varphi, \frac{h}{\delta})| &= \log_{10} |\mathcal{H}_{\theta,0}^{\text{is}}|_{\Sigma} + \frac{1}{\ln 10} \left(\beta + \frac{a_0}{2} - \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} \right) \alpha h \\ &\quad + \mathcal{O}(\delta, h). \end{aligned} \quad (8.47)$$

Par suite, la pente théorique $p(\sigma)$ définie par la relation

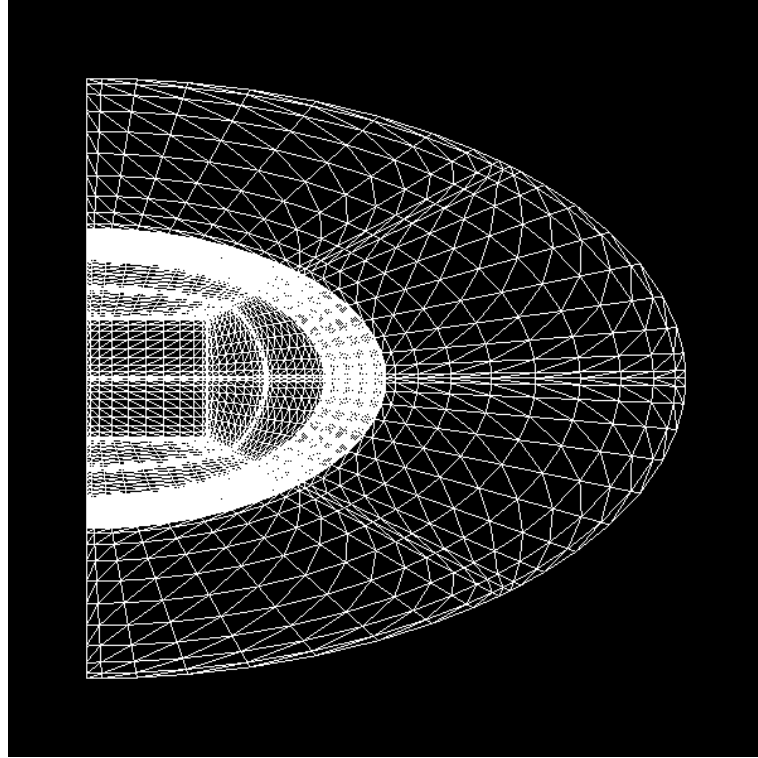
$$p(\sigma) = \frac{1}{\ln 10} \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\beta + \frac{a_0}{2} - \sqrt{\frac{\omega \mu_0 \sigma}{2}} \right) \quad (8.48)$$

est une approximation de la pente de $\log_{10} |H_{\theta,1}^{\text{cd}}(\delta)(\varphi, \frac{h}{\delta})|$ par rapport à h .

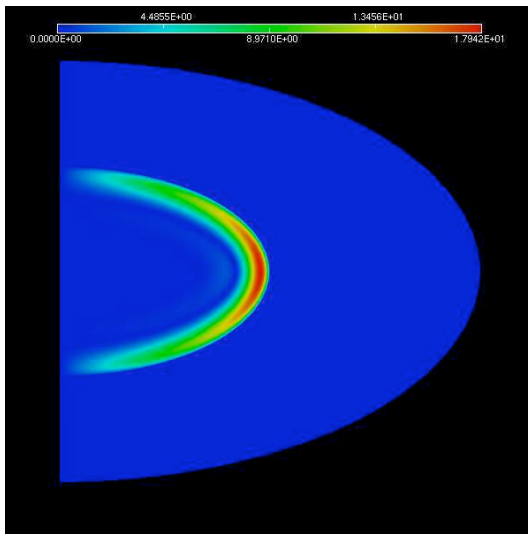
8.5.2 Simulations numériques

Maillage ellipsoïdal raffiné dans un voisinage tubulaire de l'interface dans le domaine conducteur

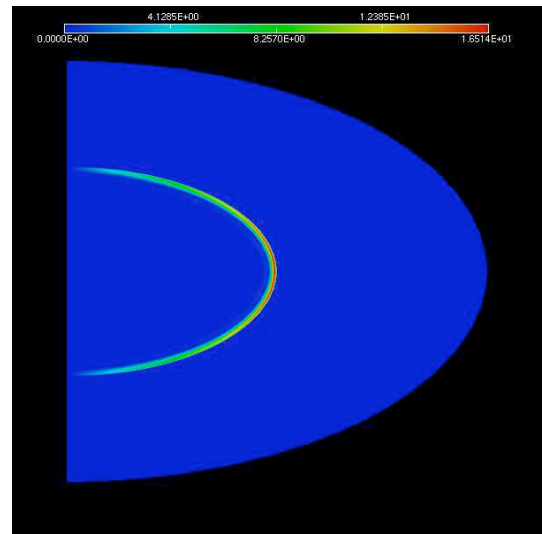
Le domaine Ω_{cd} est une sphéroïde pleine aplatie (longueur des demi-axes $a_0 = b_0 = 2$ m et $c_0 = 1$ m). Ainsi, le domaine méridien $\Omega_{\text{cd}}^{\text{m}}$ correspondant est une demi-ellipse dont la longueur des demi-axes est $a_0 = 2$ m et $c_0 = 1$ m. Le domaine Ω est une sphéroïde pleine aplatie dont les demi-axes ont pour longueurs $a_1 = b_1 = 4$ m et $c_1 = 2$ m. On a raffiné un maillage au voisinage de l'interface Σ dans le conducteur $\Omega_{\text{cd}}^{\text{m}}$ afin de mieux capter la couche-limite.



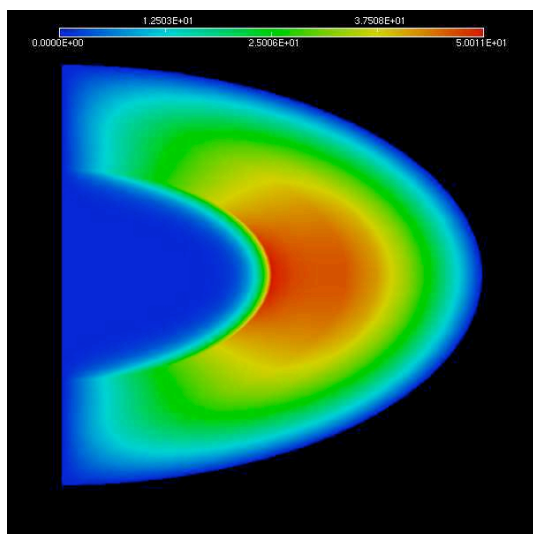
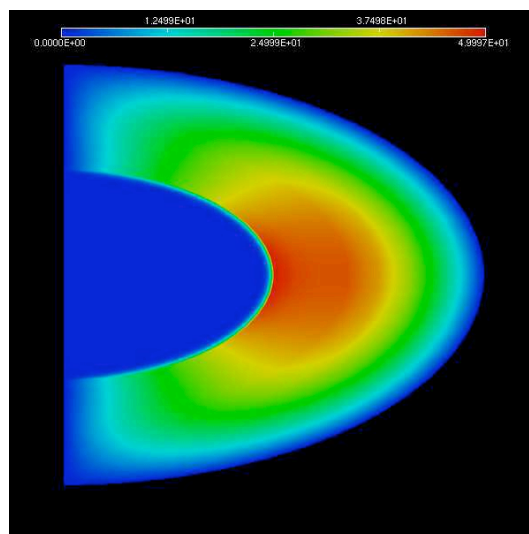
Tous les calculs numériques sont effectués pour une pulsation $\omega = 3.10^7$ Hz. On note H_σ la solution numérique calculée pour σ donné.



$|\operatorname{Im} H_\sigma|$ pour $\sigma = 5 \text{ S.m}^{-1}$



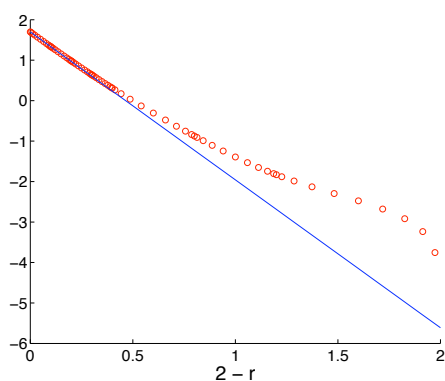
$|\operatorname{Im} H_\sigma|$ pour $\sigma = 80 \text{ S.m}^{-1}$


 $|H_\sigma|$ pour $\sigma = 5 \text{ S.m}^{-1}$

 $|H_\sigma|$ pour $\sigma = 80 \text{ S.m}^{-1}$

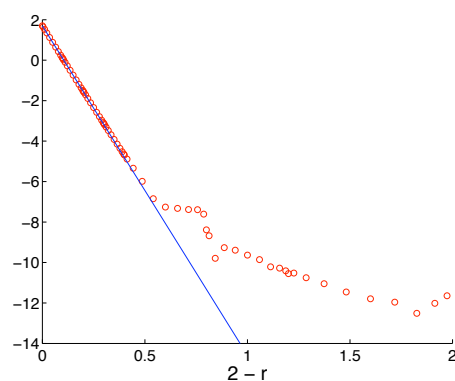
Post-traitement numérique pour $\varphi = 0$

On extrait les valeurs de $|H_\sigma|$ aux points d'interpolation de Gauss-Lobatto le long des arêtes du maillage de Ω_{cd} pour $z = 0$ et $r \in [0, 2]$. On rappelle que la coordonnée normale au voisinage du point de coordonnées $(r, z) = (2, 0)$ est $y_3 = 2 - r$.

Régression linéaire. On effectue une régression linéaire du $\log_{10} |H_\sigma(y_3)|$ pour des valeurs de y_3 plus petites que $\ell(\sigma)$. On appelle $p_2(\sigma)$ la pente numérique correspondante.



○ : $\log_{10} |H_\sigma(2 - r)|$ pour $\sigma = 5$
 $p_2(\sigma) = -3,65542$



○ : $\log_{10} |H_\sigma(2 - r)|$ pour $\sigma = 80$
 $p_2(\sigma) = -16,279162$

Comparaison avec le développement asymptotique

Remarque 8.24 D'après (8.40), en tronquant le développement asymptotique en champ

magnétique à l'ordre 1, on a la pente théorique suivante

$$\beta(\sigma) = \frac{1}{\ln 10} \left(\mathcal{H} - \frac{1}{\ell(\sigma)} \right)$$

où $\mathcal{H} = \frac{5}{4}$ est la courbure moyenne de la variété Σ sur l'axe $\{z = 0\}$.

On définit l'erreur relative $err_2(\sigma)$ entre la pente numérique $p2(\sigma)$ et la pente théorique $\beta(\sigma)$ de la façon suivante

$$err_2(\sigma) = \left| \frac{\beta(\sigma) - p2(\sigma)}{\beta(\sigma)} \right|.$$

Le tableau suivant donne le nombre $n2(\sigma)$ de valeurs du module de h extraites dans une épaisseur de peau, les pentes numériques $p2(\sigma)$ associées à $\sigma \in \{5, 20, 80\}$ et l'erreur relative $err_2(\sigma)$ entre la pente $p2(\sigma)$ et la pente théorique $\beta(\sigma)$.

σ	5	20	80
$\ell(\sigma)$ (cm)	10.3	5.15	2.58
$n2(\sigma)$	7	5	3
$p2(\sigma)$	-3,65542	-7,883903	-16,279162
$\beta(\sigma)$	-3,673319	-7,889506	-16,32188
$err_2(\sigma)$ (en %)	0,48	0,07	0,26

8.5.3 Résultats numériques hors maillage

On présente des résultats numériques sur la droite (OL) d'équation $z = \frac{r}{2}$ où L désigne le point de coordonnées $(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ dans le demi-plan méridien. Avec le logiciel de calcul MATLAB, on trace le graphe de $\log_{10} |H_\sigma(P(r, z))|$ par rapport à

$$\sqrt{(r_L - r)^2 + (z_L - z)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}(r_L - r)$$

sur l'axe (OL) . Une régression linéaire donne une pente numérique $a(\sigma)$ dont on a regroupé les valeurs dans le tableau ci-dessous pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$.

σ	5	20	80
$a(\sigma)$	-3,352443	-6,72015	-13.43666
$\sqrt{5}/2 a(\sigma)$	-3,7519915	-7.513356	-15.0226425

On compare ces résultats avec les calculs théoriques : le tableau suivant fournit les valeurs de $p(\sigma)$ et de l'erreur relative $err(\sigma)$ entre $p(\sigma)$ définie par la relation (8.48) et

$\sqrt{5}/2 a(\sigma)$ pour $\sigma \in \{5, 20, 80\}$:

σ	5	20	80
$p(\sigma)$	-3.776187	-7.547259	-15.089405
$err(\sigma)$ (en %)	0,6	0,45	0,44

Chapitre 9

Conditions de transmission approchées pour les équations de Maxwell en régime harmonique dans un milieu à couche mince

9.1 Introduction

Ce neuvième chapitre est le fruit d’une collaboration scientifique avec Clair Poignard. Ce travail a abouti à la rédaction d’un article dont le titre original est *Approximate transmission conditions for time-harmonic Maxwell equations in a domain with thin layer*. Après un résumé sur le sujet, on reproduit l’article à l’identique.

Auteurs

Victor Péron, Université de Rennes1, IRMAR & CNRS UMR 6625, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex, France. *Email* : victor.peron@univ-rennes1.fr .

Clair Poignard, INRIA Bordeaux-Sud-Ouest, Institut de Mathématiques de Bordeaux, CNRS UMR 5251 & Université de Bordeaux1, 351 cours de la Libération, 33405 Talence Cedex, France. *Email* : clair.poignard@inria.fr .

Résumé

On étudie le comportement asymptotique du champ électromagnétique dans une cellule biologique plongée dans un milieu ambiant lorsque l’épaisseur ε de sa membrane tend vers 0. La cellule est composée d’un cytoplasme entouré d’une fine membrane. On calcule des conditions de transmission sur le bord du cytoplasme équivalentes à la

couche mince. On adopte une approche géométrique basée sur un changement de variables adéquat dans la couche mince. On rappelle quelques notions de calcul différentiel afin d'obtenir le développement asymptotique. On démontre par ailleurs des estimations d'erreurs. On présente enfin en appendice le développement asymptotique à tout ordre.

Abstract

We study the behavior of the electromagnetic field in a biological cell modeled by a medium surrounded by a thin layer and embedded in an ambient medium. We derive approximate transmission conditions in order to replace the membrane by these conditions on the boundary of the interior domain. Our approach is essentially geometric and based on a suitable change of variables in the thin layer. Few notions of differential calculus are given in order to obtain our asymptotic conditions in a simple way. This paper extends to time-harmonic Maxwell equations the previous works presented in [55, 57, 56, 12]. Asymptotic transmission conditions at any order are given in Appendix 1.

9.2 Motivations

The electromagnetic modelization of biological cells has become extremely important since several years, in particular in the biomedical research area. In the simple models [28, 30], the biological cell is a domain with thin layer composed of a conducting cytoplasm surrounded by a thin insulating membrane. When exposed to an electric field, a potential difference is induced across the cell membrane. This transmembrane potential (TMP) may be of sufficient magnitude to be biologically significant. In particular, if it overcomes a threshold value, complex phenomena such as electroporation or electropermeabilization may occur [65, 63, 47, 46]. The electrostatic pressure becomes too high that the thin membrane is locally destructured : some exterior molecules might be internalized inside the cell. These processes hold great promises particularly in oncology and gene therapy, to deliver drug molecules in cancer treatment. This is the reason why an accurate knowledge of the distribution of the electromagnetic field in the biological cell is necessary.

Several papers in the bioelectromagnetic research area deal with numerical electromagnetic modelizations of biological cells [51, 60, 58]. Actually the main difficulties of the numerical computations lie in the thinness of the membrane (the relative thickness of the membrane is of order 1/1000 compared with the size of the cell) and in the high contrast between the electromagnetic parameters of the cytoplasm and the membrane. We present here an asymptotic method to replace the thin membrane by appropriate transmission conditions on the boundary of the cytoplasm.

In previous papers [55, 57, 56, 12], an asymptotic analysis is proposed to compute the

electric potential in domains with thin layer, using the electroquasistatic approximation¹. However it is not clear that the magnetic effects of the field may be neglected. This is the reason why we present in this paper an asymptotic analysis for time-harmonic Maxwell equations in a domain with thin layer.

Our analysis is closed to those performed in [55, 57, 56]. Roughly speaking, it is based on a suitable change of variables in the membrane in order to write the explicit dependence of the studied differential operator in terms of the small parameter (the thinness of the membrane). Since we consider Maxwell equations in time-harmonic regime, in accordance with Flanders [29], Warnick *et al.* [66, 67] and Lassas *et al.* [35, 36], we choose the differential calculus formalism to perform our change of variables in a simple way. Basic notions of differential forms with explicit formulae are recalled in Appendix 2.

Throughout this paper, we consider a material composed of an interior domain surrounded by a thin membrane. This material, representing a biological cell, is embedded in an ambient medium submitted to an electric current density. We study the asymptotic behavior of the electromagnetic field in the three domains (the ambient medium, the thin layer and the cytoplasm) for the thickness of the membrane tending to zero. We derive appropriate transmission conditions on the boundary of the cytoplasm in order to remove the thin layer from the problem. Actually, the influence of the membrane is approached by these transmission conditions. To justify our asymptotic expansion, we provide piecewise estimates of the error between the exact solution and the approximate solution.

The paper is structured as follows. In Section 9.3, we present the studied problem in the differential calculus formalism and the main result of the paper. Section 9.4 is devoted to the geometry : we perform our change of variables and we write the problem in the so-called local coordinates. In Section 9.5 we derive formally our asymptotic expansion, which is rigorously proved in Section 9.6. In Appendix 1, we give recurrence formulae to obtain asymptotics at any order. Appendix 2 is devoted to the basic notions of differential forms used in the paper.

9.3 Maxwell equations using differential forms

In the following we use the conventions of differential calculus formalism. Definitions and basic properties of the differential calculus are given in Appendix 2. We recall here the usual notations.

Notation 9.3.1 *Let k be an integer. For a compact, connected and oriented Riemannian manifold (M, \mathfrak{g}) of \mathbb{R}^n we denote by $\Omega^k(M)$ the space of k -forms defined on M .*

¹The electroquasistatic approximation consists in considering that the electric field comes from a potential : $E = -\nabla V$. In this approximation the curl part of the electric field vanishes and the magnetic field is neglected.

- The exterior product between two differential forms ω and η is denoted by $\omega \wedge \eta$.
- The inner product on $\Omega^k(M)$ is denoted by $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega^k}$.
- The Hodge star operator is denoted by \star .
- The interior product of a differential form ω with a smooth vector field Y is written $\text{int}(Y)\omega$.

Let us denote the exterior differential and codifferential operators respectively by d , δ . The Laplace-Beltrami operator Δ is defined by $\Delta = -d\delta - \delta d$.

$L^2\Omega^k(M)$ is the space of the square integrable k -forms of M while for $s \in \mathbb{R}$, $H^s\Omega^k(M)$ is the usual Sobolev space of k -forms. Let $H\Omega^k(d, M)$ and $H\Omega^k(\delta, M)$ denote

$$H\Omega^k(d, M) = \{\omega \in L^2\Omega^k(M) : d\omega \in L^2\Omega^{k+1}(M)\}, \quad (9.1)$$

$$H\Omega^k(\delta, M) = \{\omega \in L^2\Omega^k(M) : \delta\omega \in L^2\Omega^{k-1}(M)\}, \quad (9.2)$$

that are Banach spaces when associated with their respective norms

$$\begin{aligned} \|\omega\|_{H\Omega^k(d, M)} &= \|\omega\|_{L^2\Omega^k(M)} + \|d\omega\|_{L^2\Omega^{k+1}(M)}, \\ \|\omega\|_{H\Omega^k(\delta, M)} &= \|\omega\|_{L^2\Omega^k(M)} + \|\delta\omega\|_{L^2\Omega^{k-1}(M)}. \end{aligned}$$

We also denote by $H\Omega^k(d, \delta, M)$ the space $H\Omega^k(d, M) \cap H\Omega^k(\delta, M)$ equipped with the norm

$$\|\omega\|_{H\Omega^k(d, \delta, M)} = \|\omega\|_{L^2\Omega^k(M)} + \|d\omega\|_{L^2\Omega^{k+1}(M)} + \|\delta\omega\|_{L^2\Omega^{k-1}(M)}.$$

$H^s(M)$ and $L^2(M)$ denotes the respective spaces $H^s\Omega^0(M)$ and $L^2\Omega^0(M)$.

9.3.1 The considered problem

Let Γ be a compact oriented surface of \mathbb{R}^3 without boundary. Consider the smooth connected bounded domain \mathcal{O}_c with boundary Γ ; \mathcal{O}_c is surrounded by a thin layer $\mathcal{O}_m^\varepsilon$ with constant thickness ε . This material with thin layer is embedded in an ambient smooth connected domain $\mathcal{O}_e^\varepsilon$ with compact oriented boundary. We denote by \mathcal{O} the ε -independent domain defined by

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_e^\varepsilon \cup \overline{\mathcal{O}_m^\varepsilon} \cup \mathcal{O}_c.$$

Moreover, we denote by Γ_ε the boundary of $\overline{\mathcal{O}_c \cup \mathcal{O}_m^\varepsilon}$ (see Figure 1). Let μ_c , μ_m and μ_e be three positive constants and let q_e , q_c and q_m be three complex numbers. Define the two piecewise functions μ and q on \mathcal{O} by

$$\forall x \in \mathcal{O}, \quad \mu(x) = \begin{cases} \mu_e, & \text{in } \mathcal{O}_e^\varepsilon, \\ \mu_m, & \text{in } \mathcal{O}_m^\varepsilon, \\ \mu_c, & \text{in } \mathcal{O}_c, \end{cases} \quad \forall x \in \mathcal{O}, \quad q(x) = \begin{cases} q_e, & \text{in } \mathcal{O}_e^\varepsilon, \\ q_m, & \text{in } \mathcal{O}_m^\varepsilon, \\ q_c, & \text{in } \mathcal{O}_c. \end{cases}$$

The function μ is the dimensionless permeability of \mathcal{O} while the function q denotes its dimensionless complex permittivity².

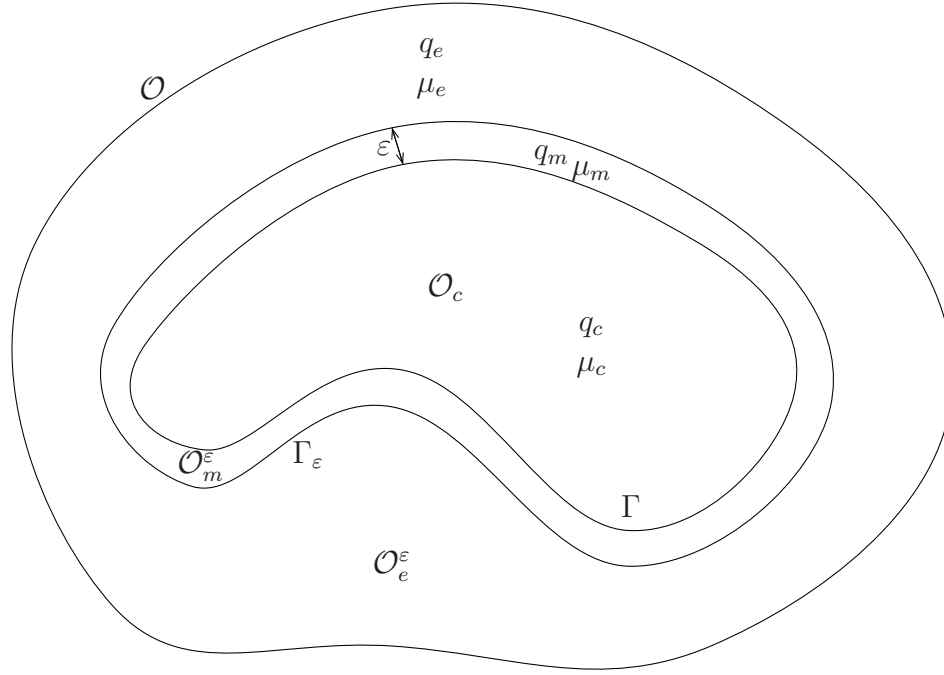


Figure 1 : Geometry of the problem

Let $d_0 > 0$ such that for each point q of Γ , the normal lines of Γ passing through q , with center at q and length $2d_0$ are disjoint. In the following, we suppose that $\varepsilon \in (0, d_0)$. We denote by $\mathcal{O}_e^{d_0}$ the set of points $x \in \mathcal{O}_e^\varepsilon$ at the distance greater than d_0 of Γ . We suppose that the ambient medium is submitted to a current density \mathbf{J} compactly supported in $\mathcal{O}_e^{d_0}$. All along the paper the following hypothesis holds.

Hypothèse 9.1 (i) *There exists $c_1, c_2 > 0$ such that for all $x \in \mathcal{O}$,*

$$c_1 \leq -\operatorname{Im}(q(x)) \leq c_2, \quad 0 < \operatorname{Re}(q(x)) \leq c_2. \quad (9.3)$$

(ii) *The source current density \mathbf{J} satisfies*

$$\operatorname{supp}(\mathbf{J}) \Subset \mathcal{O}_e^{d_0}, \quad \mathbf{J} \in L^2 \Omega^1(\mathcal{O}), \quad \delta \mathbf{J} = 0, \text{ in } \mathcal{O}.$$

²Using the notations of the electrical engineering community, $q = \omega^2 (\epsilon - i \frac{\sigma}{\omega})$, where ω is the frequency, ϵ the permittivity and σ the conductivity of the domain [7].

Maxwell equations describe the behavior of the electromagnetic field in \mathcal{O} . Denote by \mathbf{E} and \mathbf{H} the 1-forms representing respectively the electric and the magnetic fields in \mathcal{O} in time-harmonic regime. Denote by $N_{\partial\mathcal{O}}$ the outward normal vector field to $\partial\mathcal{O}$. In the following and accordingly Remark 9.8.2 of Appendix 2, the normal vector field and the corresponding normal 1-form are identified. Maxwell equations in time-harmonic regime write [35, 36, 66]

$$d\mathbf{E} = i \star (\mu \mathbf{H}), \quad d\mathbf{H} = -i \star (q\mathbf{E} + \mathbf{J}), \quad \text{in } \mathcal{O}, \quad (9.4a)$$

$$N_{\partial\mathcal{O}} \times \mathbf{E}|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad \text{on } \partial\mathcal{O}. \quad (9.4b)$$

Using the idempotence of \star in \mathbb{R}^3 , we may infer the vector wave equation on \mathbf{E}

$$\star d \left(\frac{1}{\mu} \star d\mathbf{E} \right) - q\mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad \text{in } \mathcal{O}, \quad N_{\partial\mathcal{O}} \times \mathbf{E}|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad \text{on } \partial\mathcal{O}.$$

Since μ is a scalar function³ of \mathcal{O} , we infer

$$\delta \left(\frac{1}{\mu} d\mathbf{E} \right) - q\mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad \text{in } \mathcal{O}, \quad N_{\partial\mathcal{O}} \times \mathbf{E}|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad \text{on } \partial\mathcal{O}. \quad (9.5)$$

Remark 9.3.2 Denote \mathbf{E} in Euclidean coordinates by $E_x dx + E_y dy + E_z dz$ and similarly for \mathbf{H} and \mathbf{J} . Problem (9.4) and problem (9.5) write now

$$\text{curl } \mathbf{E} = i\mu\mathbf{H}, \quad \text{curl } \mathbf{H} = -i(q\mathbf{E} + \mathbf{J}), \quad \text{in } \mathcal{O}, \quad N_{\partial\mathcal{O}} \times \mathbf{E}|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad \text{on } \partial\mathcal{O},$$

and

$$\text{curl} \left(\frac{1}{\mu} \text{curl } \mathbf{E} \right) - q\mathbf{E} = \mathbf{J}, \quad \text{in } \mathcal{O}, \quad N_{\partial\mathcal{O}} \times \mathbf{E}|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad \text{on } \partial\mathcal{O}.$$

△

9.3.2 Variational formulation.

Our functional space $\mathbf{X}(q)$ is defined as

$$\mathbf{X}(q) = \{u \in H\Omega^1(d, \mathcal{O}), \delta(qu) \in L^2(\mathcal{O}), N_{\partial\mathcal{O}} \wedge u|_{\partial\mathcal{O}} = 0\},$$

associated with its graph norm

$$\|u\|_{\mathbf{X}(q)} = \|u\|_{H\Omega^1(d, \mathcal{O})} + \|\delta(qu)\|_{L^2(\mathcal{O})}.$$

³If μ is a tensor the previous equation (9.5) becomes $\delta(\star\mu^{-1}\star d\mathbf{E}) - q\mathbf{E} = \mathbf{J}$.

Define the sesquilinear form a_q in $\mathbf{X}(q)$ adapted to a regularized variational formulation of the problem (9.5) by

$$a_q(u, v) = \int_{\mathcal{O}} \left(\frac{1}{\mu} \langle du, d\bar{v} \rangle_{\Omega^2} + \langle \delta(qu), \delta(\overline{qv}) \rangle_{\Omega^0} - q \langle u, \bar{v} \rangle_{\Omega^1} \right) d\text{vol}_{\mathcal{O}}.$$

Using inequalities (9.3), the following lemma holds.

Lemma 9.3.3 *There exists a constant $c_0 > 0$ and $\alpha \in \mathbb{C}$ such that for all $\varepsilon \in (0, d_0)$,*

$$\text{Re}(\alpha a_q(u, u)) \geq c_0 \|u\|_{\mathbf{X}(q)}^2. \quad (9.6)$$

For all $\varepsilon \in (0, d_0)$, we consider the variational problem : find $\mathbf{E} \in \mathbf{X}(q)$ such that

$$\forall u \in \mathbf{X}(q), \quad a_q(\mathbf{E}, u) = \int_{\mathcal{O}} \langle \mathbf{J}, \bar{u} \rangle_{\Omega^1} d\text{vol}_{\mathcal{O}}. \quad (9.7)$$

Using Hypothesis 9.1 the following theorem holds.

Theorem 9.3.4 (Equivalent problems) *Let Hypothesis 9.1 hold.*

- (i) *There is at most one solution $\mathbf{E} \in \mathbf{X}(q)$ to problem (9.7).*
- (ii) *The solution \mathbf{E} satisfies (9.5) in a weak sense*

$$\delta d\mathbf{E} - \mu q \mathbf{E} = \mathbf{J}, \text{ in } \mathcal{O}_e^\varepsilon \cup \mathcal{O}_m^\varepsilon \cup \mathcal{O}_c, \quad N_{\partial\mathcal{O}} \times \mathbf{E}|_{\partial\mathcal{O}} = 0,$$

with the divergence condition

$$\delta(q\mathbf{E}) = 0, \text{ in } \mathcal{O} \quad (9.8)$$

and the following equalities⁴ hold for $\mathcal{S} \in \{\Gamma, \Gamma_\varepsilon\}$

$$[N_{\mathcal{S}} \times \mathbf{E}]_{\mathcal{S}} = 0, \quad \left[\frac{1}{\mu} \text{int}(N_{\mathcal{S}}) d\mathbf{E} \right]_{\mathcal{S}} = 0, \quad [q \text{int}(N_{\mathcal{S}}) \mathbf{E}]_{\mathcal{S}} = 0. \quad (9.9)$$

- (iii) *If $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in (L^2\Omega^1(\mathcal{O}))^2$ is solution to problem (9.4) then $\mathbf{E} \in \mathbf{X}(q)$ satisfies (9.5). Conversely, if $\mathbf{E} \in \mathbf{X}(q)$ satisfies (9.5) then the couple of 1-forms $(\mathbf{E}, -(i/\mu) \star d\mathbf{E})$ belongs to $(L^2\Omega^1(\mathcal{O}))^2$ and satisfies problem (9.4).*

PREUVE. The proof is based on an idea of Costabel *et al.*.

- (i) Accordingly estimate (9.6), a straightforward application of the well-known Lax-Milgram theorem leads to existence and uniqueness of the solution \mathbf{E} to the regularized variational problem (9.7).

⁴For an oriented surface \mathcal{S} without boundary and for a differential form u defined in a neighborhood of \mathcal{S} we denote by $[u]_{\mathcal{S}}$ the jump across \mathcal{S} . $N_{\mathcal{S}}$ denotes the outward normal to \mathcal{S}

(ii) The proof is precisely worked out in full details in [15, 16] in a very slightly different configuration. We just give here the sketch of the proof. The first transmission conditions (9.9) easily come from Green formula of Proposition 9.7. The divergence conditions straightforwardly come from $\delta(q\mathbf{E}) = 0$, using (9.5) and $\delta^2 \equiv 0$. The other implication is obvious. We then prove that this solution satisfies $\delta(q\mathbf{E}) = 0$. Denote by $H\Delta(\mathcal{O})$ the space of functions $\phi \in H_0^1(\mathcal{O})$ such that $\delta(qd\phi)$ belongs to $L^2(\mathcal{O})$. Integrations by parts imply

$$\forall \phi \in H\Delta(\mathcal{O}), \quad a_q(\mathbf{E}, d\phi) = \int_{\mathcal{O}} \langle \delta(q\mathbf{E}), \overline{\delta(qd\phi) + \phi} \rangle_{\Omega^0} d\text{vol}_{\mathcal{O}}.$$

Since $\text{Im}(q) \leq -c_1 < 0$, the function $\delta(qd\phi) + \phi$ runs through the whole $L^2(\mathcal{O})$ space for ϕ running through $H\Delta(\mathcal{O})$. Moreover, since $\delta(\mathbf{J})$ vanishes we have

$$\int_{\mathcal{O}} \langle \mathbf{J}, \overline{d\phi} \rangle_{\Omega^1} d\text{vol}_{\mathcal{O}} = 0,$$

from which we infer that $\delta(q\mathbf{E})$ identically vanishes in $L^2(\mathcal{O})$ according to (9.7). Therefore the solution \mathbf{E} of problem (9.7) solves problem (9.5).

(iii) If (\mathbf{E}, \mathbf{H}) solves problem (9.4) we straightforwardly infer (9.5), since \star is idempotent and since μ is a scalar function. Conversely, defining \mathbf{H} by

$$\mathbf{H} = -\frac{i}{\mu} \star d\mathbf{E},$$

we infer that (\mathbf{E}, \mathbf{H}) solves problem (9.4). ■

Denote by \mathcal{O}_e the domain $\mathcal{O}_e = \mathcal{O} \setminus \overline{\mathcal{O}_c}$. Define $\tilde{\mu}$ and \tilde{q} by

$$\forall x \in \mathcal{O}, \quad \tilde{\mu}(x) = \begin{cases} \mu_c, & \text{in } \mathcal{O}_c, \\ \mu_e, & \text{in } \mathcal{O}_e, \end{cases} \quad \forall x \in \mathcal{O}, \quad \tilde{q}(x) = \begin{cases} q_c, & \text{in } \mathcal{O}_c, \\ q_e, & \text{in } \mathcal{O}_e. \end{cases}$$

Let $\mathbf{E}^0 \in \mathbf{X}(\tilde{q})$ be the “background” solution defined by

$$\forall u \in \mathbf{X}(\tilde{q}), \quad a_{\tilde{q}}(\mathbf{E}^0, u) = \int_{\mathcal{O}} \langle \mathbf{J}, \overline{u} \rangle_{\Omega^1} d\text{vol}_{\mathcal{O}},$$

which means in a weak sense

$$\delta \left(\frac{1}{\tilde{\mu}} d\mathbf{E}^0 \right) - \tilde{q} \mathbf{E}^0 = \mathbf{J}, \text{ in } \mathcal{O}, \quad N_{\partial\mathcal{O}} \times \mathbf{E}^0|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \quad (9.10)$$

We have the following regularity result.

Proposition 9.2 *Let Hypothesis 9.1 hold. Moreover let $s \geq 0$ and \mathbf{J} belong to $H^s \Omega^1(\mathcal{O}_e^{d_0})$. Then the 1-form \mathbf{E}^0 exists and is unique in $\mathbf{X}(\tilde{q})$. Moreover, denoting by $\mathbf{E}^{c,0}$ and $\tilde{\mathbf{E}}^{e,0}$ its respective restrictions to \mathcal{O}_c and \mathcal{O}_e , we have*

$$\tilde{\mathbf{E}}^{e,0} \in H^{2+s} \Omega^1(\mathcal{O}_e), \quad \mathbf{E}^{c,0} \in H^{2+s} \Omega^1(\mathcal{O}_c).$$

PREUVE. The 1-form \mathbf{E}^0 satisfies (9.10). The proof of the existence and the uniqueness of \mathbf{E}^0 in $\mathbf{X}(\tilde{q})$ is very similar to those performed in Theorem 9.3.4 by replacing $\mathbf{X}(q)$ by $\mathbf{X}(\tilde{q})$ and a_q by $a_{\tilde{q}}$. Since $\delta \mathbf{J}$ vanishes, we infer $\delta(\tilde{q} \mathbf{E}^0) = 0$ and therefore \mathbf{E}^0 satisfies

$$-\Delta \mathbf{E}^0 - \tilde{\mu} \tilde{q} \mathbf{E}^0 = \mathbf{J}, \text{ in } \mathcal{O}_e \cup \mathcal{O}_c, \quad N_{\partial \mathcal{O}} \times \mathbf{E}^0|_{\partial \mathcal{O}} = 0,$$

with transmission conditions

$$\begin{aligned} [N_\Gamma \wedge d\mathbf{E}^0]_\Gamma &= 0, \quad [\tilde{q} \text{int}(N_\Gamma) \mathbf{E}^0]_\Gamma = 0, \\ \left[\frac{1}{\tilde{\mu}} \text{int}(N_\Gamma) d\mathbf{E}^0 \right]_\Gamma &= 0, \quad [\delta(\tilde{q} \mathbf{E}^0)]_\Gamma = 0. \end{aligned}$$

The same calculations as performed in Proposition 2.1 of Costabel *et al.* [16] imply that the set of the above transmission and boundary conditions covers⁵ the Laplacian in \mathcal{O}_c and in \mathcal{O}_e , in the sense of Definition 1.5 at page 125 of Lions and Magenes [40]. Therefore we infer the piecewise elliptic regularity of \mathbf{E}^0 , which ends the proof of the lemma. ■

The following estimates hold

Proposition 9.3 *Under Hypothesis 9.1, there exists $C > 0$ such that for all $\varepsilon \in (0, d_0)$*

$$\|\mathbf{E}\|_{\mathbf{X}(q)} \leq C, \tag{9.11}$$

$$\|\mathbf{E} - \mathbf{E}^0\|_{H\Omega^1(d, \mathcal{O})} \leq C\sqrt{\varepsilon}. \tag{9.12}$$

PREUVE. Using (9.6), estimates (9.11) are obvious since $\text{Im}(q) \leq -c_1 < 0$. Prove now (9.12). We first mention that \mathbf{E}^0 belongs to $H^2 \Omega^1(\varpi)$ for $\varpi \in \{\mathcal{O}_e, \mathcal{O}_c\}$, according to Proposition 9.2; hence $\mathbf{E}^0 \in L^\infty \Omega^1(\varpi)$ and $d\mathbf{E}^0 \in L^\infty \Omega^2(\varpi)$. Denoting by $\mathbb{U} = \mathbf{E} - \mathbf{E}^0$ we infer

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{O}} \frac{1}{\mu} \langle d\mathbb{U}, \overline{d\mathbb{U}} \rangle_{\Omega^2} - q \langle \mathbb{U}, \overline{\mathbb{U}} \rangle_{\Omega^1} d\text{vol}_{\mathcal{O}} &= q_m \int_{\mathcal{O}_m^\varepsilon} \langle \mathbf{E}^0, \overline{\mathbb{U}} \rangle_{\Omega^1} d\text{vol}_{\mathcal{O}_m^\varepsilon} \\ &- \frac{1}{\mu_m} \int_{\mathcal{O}_m^\varepsilon} \langle d\mathbf{E}^0, \overline{d\mathbb{U}} \rangle_{\Omega^2} d\text{vol}_{\mathcal{O}_m^\varepsilon}. \end{aligned}$$

⁵Accordingly the appendix of the paper of Li and Vogelius [39] the regularity of \mathbf{E}^0 may also be obtained by using a reflection to reduce the problem to an elliptic system with complementing boundary conditions in the sense of Agmon *et al.* [2, 3].

Therefore using (9.11) and using the assumption (9.3) on q , we infer

$$\|d\mathbb{U}\|_{L^2\Omega^2(\mathcal{O})} + \|\mathbb{U}\|_{L^2\Omega^1(\mathcal{O})} \leq C\sqrt{\varepsilon}.$$

■

9.3.3 Main result

Consider the inclusion $\mathcal{J} : \Gamma \longrightarrow \mathcal{O}$, and \mathcal{J}^* its pull-back $\mathcal{J}^* : \Omega^k(\mathcal{O}) \longrightarrow \Omega^k(\Gamma)$, $k \in \{0, 1, 2, 3\}$. Denote by d_Γ and δ_Γ the exterior differential and the codifferential operators defined on $\Omega^k(\Gamma)$. Define \mathbb{S} and \mathbb{T} by

$$\mathbb{S} = (q_m - q_e) \mathcal{J}^*(\mathbf{E}^0)|_{\Gamma^+} + \left(\frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_e} \right) \delta_\Gamma d_\Gamma (\mathcal{J}^*(\mathbf{E}^0))|_{\Gamma^+}, \quad (9.13)$$

$$\mathbb{T} = q_c \left(\frac{1}{q_m} - \frac{1}{q_e} \right) d \left(\text{int}(N_\Gamma) \mathbf{E}^0|_{\Gamma^-} \right) + \frac{\mu_m - \mu_e}{\mu_c} \text{int}(N_\Gamma) (d\mathbf{E}^0)|_{\Gamma^-}. \quad (9.14)$$

The explicit expressions of \mathbb{S} and \mathbb{T} in local coordinates are given in Section 9.6. Let \mathbf{E}^1 be the 1-forms defined by

$$\delta d\mathbf{E}^1 - \tilde{\mu}\tilde{q}\mathbf{E}^1 = 0, \text{ in } \mathcal{O}_e \cup \mathcal{O}_c, \quad N_{\partial\mathcal{O}} \times \mathbf{E}^1|_{\partial\mathcal{O}} = 0,$$

with the following transmission conditions on Γ

$$\frac{1}{\mu_e} \text{int}(N_\Gamma) d\mathbf{E}^1|_{\Gamma^+} - \frac{1}{\mu_c} \text{int}(N_\Gamma) d\mathbf{E}^1|_{\Gamma^-} = \mathbb{S}, \quad (9.15)$$

$$N_\Gamma \times \mathbf{E}^1|_{\Gamma^+} - N_\Gamma \times \mathbf{E}^1|_{\Gamma^-} = N_\Gamma \times \mathbb{T}. \quad (9.16)$$

The aim of this paper is to prove the following theorem.

Theorem 9.3.5 *Under Hypothesis 9.1, if moreover the current density \mathbf{J} belongs to $H^3\Omega^1(\mathcal{O}_e^{d_0})$, there exists $\varepsilon_0 > 0$ and a constant C , independent on ε such that*

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), \quad \|\mathbf{E} - (\mathbf{E}^0 + \varepsilon \mathbf{E}^1)\|_{H\Omega^1(d, \delta, \mathcal{O}_c)} \leq C\varepsilon^2,$$

and for any domain ϖ compactly embedded in \mathcal{O}_e , there exists $\varepsilon_\varpi > 0$ and a constant $C_\varpi > 0$ independent on ε such that

$$\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_\varpi), \quad \|\mathbf{E} - (\mathbf{E}^0 + \varepsilon \mathbf{E}^1)\|_{H\Omega^1(d, \delta, \varpi)} \leq C_\varpi \varepsilon^2.$$

Remark 9.3.6 It is possible to give a precise behavior of \mathbf{E} in a neighborhood of Γ by defining a 1-form in the thin membrane (see Theorem 9.6.1). \triangle

In this paper we choose to deal with differential forms, in accordance with Flanders [29]. This point of view has the convenience of considering both electric and magnetic fields as 1-forms, *i.e.* they are physically similar in accordance with electrical engineering considerations [7]. It is also possible to derive our asymptotics by tensor calculus considerations, as used in linear elasticity of thin shell [19, 26, 27]. This approach is worked out in full details in the thesis [53] of the first author.

Remark 9.3.7 [The tensor calculus formulation] Since we are confident that our result might be very useful for bioelectromagnetic computations, and since the electrical engineering community may feel uncomfortable with the differential calculus formalism, we translate our result with the help of “usual” differential operators. Denote by ∇_Γ and $\nabla_\Gamma \cdot$ the respective gradient and divergence operators on Γ . Define Rot_Γ and rot_Γ by

$$\begin{aligned} \forall f \in C^\infty(\Gamma), \quad \text{Rot}_\Gamma f &= (\nabla_\Gamma f) \times N_\Gamma, \\ \forall \mathbf{f} \in (C^\infty(\Gamma))^3, \quad \text{rot}_\Gamma \mathbf{f} &= \nabla_\Gamma \cdot (\mathbf{f} \times N_\Gamma). \end{aligned}$$

Then $(\mathbf{E}^k)_{k=0,1}$ (seen as vector field) satisfy the following equations

$$\text{curl curl } \mathbf{E}^k - \tilde{\mu} \tilde{q} \mathbf{E}^k = \delta_0^k \mathbf{J}, \text{ in } \mathcal{O}_e \cup \mathcal{O}_c, \quad N_{\partial \mathcal{O}} \times \mathbf{E}^k|_{\partial \mathcal{O}} = 0,$$

with the following transmission conditions on Γ

$$N_\Gamma \times \mathbf{E}^0|_{\Gamma^+} = N_\Gamma \times \mathbf{E}^0|_{\Gamma^-}, \quad \frac{1}{\mu_e} (N_\Gamma \times \text{curl } \mathbf{E}^0)|_{\Gamma^+} = \frac{1}{\mu_c} (N_\Gamma \times \text{curl } \mathbf{E}^0)|_{\Gamma^-}, \quad (9.17)$$

$$\begin{aligned} N_\Gamma \times \mathbf{E}^1|_{\Gamma^+} \times N_\Gamma &= N_\Gamma \times \mathbf{E}^1|_{\Gamma^-} \times N_\Gamma + q_c \left(\frac{1}{q_m} - \frac{1}{q_e} \right) \nabla_\Gamma (\mathbf{E}^0|_{\Gamma^-} \cdot N_\Gamma) \\ &\quad + \frac{\mu_m - \mu_e}{\mu_c} (\text{curl } \mathbf{E}^0 \times N_\Gamma)|_{\Gamma^-}, \\ \frac{1}{\mu_e} (\text{curl } \mathbf{E}^1 \times N_\Gamma)|_{\Gamma^+} &= \frac{1}{\mu_c} (\text{curl } \mathbf{E}^1 \times N_\Gamma)|_{\Gamma^-} + (q_m - q_e) (N_\Gamma \times \mathbf{E}^0 \times N_\Gamma)|_{\Gamma^+} \\ &\quad + \left(\frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_e} \right) \text{Rot}_\Gamma \text{rot}_\Gamma (N_\Gamma \times \mathbf{E}^0 \times N_\Gamma)|_{\Gamma^+}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

△

Remark 9.3.8 [The impedance boundary condition of Engquist–Nédélec [24]] Let \mathbf{J} be supported in \mathcal{O}_c (and divergence free) and suppose that $\mathcal{O}_e^\varepsilon$ is a perfectly conducting domain. Therefore $q_e = +\infty$ and $\mu_e = 0$. An homogeneous Dirichlet condition is imposed on Γ_ε

$$N_{\Gamma_\varepsilon} \times \mathbf{E}|_{\Gamma_\varepsilon} = 0.$$

We are now in the same configuration as the problem studied by Engquist and Nédélec [24] at page 18. According to (9.17)–(9.18), writing the condition satisfied by $\mathbf{E}^0 + \varepsilon \mathbf{E}^1$ and neglecting the terms in ε^2 , we infer the following boundary condition for the first-order approximate field \mathbf{E}_a

$$N_\Gamma \times \mathbf{E}_a|_{\Gamma^-} \times N_\Gamma = -\varepsilon \left(\frac{q_c}{q_m} \nabla_\Gamma (\mathbf{E}_a|_{\Gamma^-} \cdot N_\Gamma) + \frac{\mu_m}{\mu_c} (\operatorname{curl} \mathbf{E}_a \times N_\Gamma)|_{\Gamma^-} \right).$$

Recall that according to Maxwell equations, $\operatorname{curl} \mathbf{E} = i\mu_c \mathbf{H}$ and $\operatorname{curl} \mathbf{H} = -iq_c \mathbf{E}$. Therefore $q_c \mathbf{E} \cdot N_\Gamma = i \operatorname{curl} \mathbf{H} \cdot N_\Gamma$. According to the definition of ∇_Γ (see for example equation (2.22) page 5 of [24]), we infer⁶

$$\nabla_\Gamma \cdot (\mathbf{H} \times N_\Gamma) = \operatorname{curl} \mathbf{H} \cdot N_\Gamma = -iq_c \mathbf{E} \cdot N_\Gamma, \quad (9.19)$$

and the impedance boundary condition follows

$$N_\Gamma \times \mathbf{E}_a|_{\Gamma^-} \times N_\Gamma = -i\varepsilon \left(\frac{1}{q_m} \nabla_\Gamma (\nabla_\Gamma \cdot (\mathbf{H}_a \times N_\Gamma)) + \mu_m (\mathbf{H}_a \times N_\Gamma)|_{\Gamma^-} \right).$$

Observe that this is the impedance boundary condition of given in [24] page 19, since they took the normal interior to their domain Ω_∞ , hence $n = -N_\Gamma$. \triangle

We point out few arguments to enlight the convenience of differential calculus formalism.

(i) **Anisotropy.** For sake of simplicity, we deal here with isotropic materials, however the anisotropic case may be interesting for applications. In this case, μ and q are matrices and the vector wave equation becomes

$$\delta \left((\star \mu^{-1} \star) d\mathbf{E} \right) - q\mathbf{E} = \mathbf{J}, \text{ in } \mathcal{O} \quad N_{\partial\mathcal{O}} \times \mathbf{E}|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \text{ on } \partial\mathcal{O},$$

and the following transmission conditions hold on $\mathcal{S} \in \{\Gamma, \Gamma_\varepsilon\}$

$$[\operatorname{int}(N_{\mathcal{S}}) (\star \mu^{-1} \star d\mathbf{E})]_{\mathcal{S}} = 0, \quad [N_{\mathcal{S}} \times \mathbf{E}]_{\mathcal{S}} = 0.$$

To obtain the approximate transmission conditions equivalent to the thin layer, we just have to write the tensor $\star \mu^{-1} \star$ in local coordinates, with the help of the explicit formulae given in Appendix 2. The calculations are more tedious but we are confident that the reader has all the tools to perform the analysis.

⁶Using differential forms and since $dN = 0$ equality (9.59) implies

$$\operatorname{int}(N_\Gamma) \mathbf{E}^0|_{\Gamma^-} = -\frac{1}{iq_c} \operatorname{int}(N_\Gamma) \delta (\star \mathbf{H}^0) = -\frac{1}{iq_c} \delta_\Gamma (\operatorname{int}(N) \star \mathbf{H}^0|_\Gamma), \text{ which is exactly equality (9.19).}$$

(ii) **Non-constant thickness.** We consider here a thin layer with constant thickness. As mentioned in Section 9.2 a high electric field may occur a dramatically local decreasing of the thickness of the membrane, possibly leading to the apparition of pores. Hence the thickness of the membrane is no more constant with respect to the tangential variable. As performed in [56], the change of variables would lead to additional terms in the transmission conditions. These terms would come from the fact that the coefficients g_{i3} of the matrix (g_{ij}) given by (9.20) do not vanish. The derivation of the asymptotics would be more tedious but, once again, we are confident that all the tools are given in the present paper to perform the calculation.

In the case of a rough thin layer, the present analysis may not be applied. We have to introduce appropriate correctors as performed in [12].

(iii) **Link with Helmholtz equation.** Observe that equations (9.5) are well-defined if \mathbf{E} and \mathbf{J} are functions, since the operators d and δ are defined for k -forms and the exterior product between a 1-form and a function is also well-defined. Moreover, since δ acting on functions is zero, the operator $-\delta d$ coincides with Laplace-Beltrami operator Δ . In addition, the above differential forms \mathbb{S} and \mathbb{T} are well-defined even if \mathbf{E}^0 is a function, and in this case we have

$$\begin{aligned}\mathbb{S} &= (q_m - q_e) \mathbf{E}^0|_{\Gamma^+} + \left(\frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_e} \right) \delta_\Gamma d_\Gamma (\mathbf{E}^0)|_{\Gamma^+}, \\ \mathbb{T} &= \frac{\mu_m - \mu_e}{\mu_c} \text{int}(N_\Gamma) (d\mathbf{E}^0)|_{\Gamma^-},\end{aligned}$$

since the interior product $\text{int}(N_\Gamma)$ acting on functions is zero. Writing formally our asymptotic transmission conditions for functions in tensor calculus formalism, we infer that the function u solution to

$$-\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla u \right) - qu = j, \text{ in } \mathcal{O}, \quad u|_{\partial\mathcal{O}} = 0,$$

is approached by $u^0 + \varepsilon u^1$ where $(u^k)_{k=0,1}$ satisfy

$$-\Delta u^k - \tilde{\mu} \tilde{q} u^k = \delta_0^k j, \quad \text{in } \mathcal{O}_c \cup \mathcal{O}_e, \quad u^k|_{\partial\mathcal{O}} = 0,$$

with the following transmission conditions

$$\begin{aligned}[u^0]_\Gamma &= 0, \quad \left[\frac{1}{\tilde{\mu}} \partial_n u^0 \right]_\Gamma = 0, \quad u^1|_{\Gamma^+} - u^1|_{\Gamma^-} = \frac{\mu_m - \mu_e}{\mu_c} \partial_n u^0|_{\Gamma^-}, \\ \frac{1}{\mu_e} \partial_n u^1|_{\Gamma^+} - \frac{1}{\mu_c} \partial_n u^1|_{\Gamma^-} &= (q_m - q_e) u^0|_{\Gamma^+} - \left(\frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_e} \right) \Delta_\Gamma u^0|_{\Gamma^+}.\end{aligned}$$

This asymptotic expansion is rigorously proved in [54] (see equations (4) page 4 of [54]). Therefore the differential calculus provide a link between the results for Helmholtz and Maxwell equations.

9.4 Geometry

Let \mathcal{V}_Γ be the tubular open neighborhood of Γ composed by the points at the distance d_0 of Γ . In the following, it will be convenient to write the involved differential form \mathbf{E} in local coordinates in the tubular neighborhood \mathcal{V}_Γ of Γ . We denote by $\mathcal{V}_\epsilon^\epsilon$ and \mathcal{V}_c the respective intersections $\mathcal{V}_\Gamma \cap \mathcal{O}_\epsilon^\epsilon$ and $\mathcal{V}_\Gamma \cap \mathcal{O}_c$.

9.4.1 Parameterization of Γ .

Let $\mathbf{x}_\Gamma = (x_1, x_2)$ be a system of local coordinates on $\Gamma = \{\psi(\mathbf{x}_\Gamma)\}$. By abuse of notations, we denote by $\mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma$ the point of Γ equal to $\psi(\mathbf{x}_\Gamma)$. In the (x_1, x_2) -coordinates, we denote by N_Γ the outward vector normal to Γ defined by

$$N_\Gamma = \frac{\partial_1 \psi \wedge \partial_2 \psi}{\|\partial_1 \psi \wedge \partial_2 \psi\|},$$

and we define by Φ the following map

$$\forall(\mathbf{x}_\Gamma, x_3) \in \Gamma \times \mathbb{R}, \quad \Phi(\mathbf{x}_\Gamma, x_3) = \psi(\mathbf{x}_\Gamma) + x_3 N_\Gamma(\mathbf{x}_\Gamma).$$

Notation 9.4.1 In the following ∂_j stands for ∂_{x_j} for $j = 1, 2, 3$. Moreover we use the summation indices convention $a_i b_i = \sum_{i=1,2,3} a_i b_i$. Observe that according to our change of variables, \mathbf{x}_Γ denotes the tangential variables and x_3 is the normal direction. To accentuate the difference between \mathbf{x}_Γ and x_3 , the Greek letters α and β (and possibly γ, ι, κ and λ) denote the indices in $\{1, 2\}$, while the letters i, j, k denote the indices in $\{1, 2, 3\}$. Eventually it is convenient to introduce the Levi-Civita symbol ϵ_{ijk} defined by

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{if } \{i, j, k\} \text{ is an even permutation of } \{1, 2, 3\}, \\ -1, & \text{if } \{i, j, k\} \text{ is an odd permutation of } \{1, 2, 3\}, \\ 0, & \text{if any two labels are the same.} \end{cases}$$

According to the definition of d_0 , the tubular neighborhood \mathcal{V}_Γ of Γ may be parameterized by

$$\mathcal{V}_\Gamma = \{\Phi(\mathbf{x}_\Gamma, x_3), \quad (\mathbf{x}_\Gamma, x_3) \in \Gamma \times (-d_0, d_0)\}.$$

The system of coordinates (\mathbf{x}_Γ, x_3) is the so-called local coordinates of \mathcal{V}_Γ . The Euclidean metric of \mathcal{V}_Γ written in (\mathbf{x}_Γ, x_3) -coordinates is given by the following matrix $(g_{ij})_{i,j=1,2,3}$

$$(g_{ij})_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & 0 \\ g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (9.20)$$

where the coefficient $g_{\alpha\beta}$ equals $g_{\alpha\beta} = \langle \partial_\alpha \Phi, \partial_\beta \Phi \rangle$. Here $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the Euclidean scalar product of \mathbb{R}^3 . Denote by (g^{ij}) the inverse matrix of (g_{ij}) , and by g the determinant of (g_{ij}) . The coefficients $g_{\alpha\beta}$ might be written with the help of the coefficients of the first, the second and of the third fundamental forms of Γ in the basis $(\partial_1 \psi, \partial_2 \psi)$ (see Do Carmo [21])

$$g_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_T, x_3) = g_{\alpha\beta}^0(\mathbf{x}_T) - 2x_3 b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_T) + x_3^2 c_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_T).$$

The mean curvature \mathcal{H} of Γ equals

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \frac{\partial_3 (\sqrt{g})}{\sqrt{g}} \Big|_{x_3=0}. \quad (9.21)$$

9.4.2 The transmission conditions in local coordinates

In the (\mathbf{x}_T, x_3) -coordinates, write $\mathbf{E} = E_i dx^i$. N_Γ is the outward normal field of Γ , which is identified to the 1-form dx^3 in accordance with Remark 9.8.2. Applying straightforward the formulas of Appendix 2 we infer

$$N_\Gamma \times \mathbf{E} = E_\alpha dx^3 dx^\alpha, \quad \text{int}(N_\Gamma) \mathbf{E} = E_3, \quad \text{int}(N_\Gamma) d\mathbf{E} = (\partial_3 E_\alpha - \partial_\alpha E_3) dx^\alpha.$$

Hence transmission conditions (9.9) write for $h \in \{0, \varepsilon\}$

$$[E_\alpha]_{x_3=h} = 0, \quad \left[\frac{1}{\mu} (\partial_3 E_\alpha - \partial_\alpha E_3) \right]_{x_3=h} = 0, \quad [q E_3]_{x_3=h} = 0. \quad (9.22)$$

9.4.3 Rescaling in the thin layer

Denote by E_j^ε and by E_j^c the respective restrictions of E_j to $\mathcal{V}_\varepsilon^\varepsilon$ and to \mathcal{V}_c . In $\mathcal{O}_m^\varepsilon$ we perform the rescaling $x_3 = \varepsilon \eta$, $\eta \in (0, 1)$, and we denote by E_j^m , by g_{ij}^m and by g^m the following functions

$$\forall \eta \in (0, 1), \quad \begin{cases} \mathcal{E}_j^m(\mathbf{x}_T, \eta) = E_j(\mathbf{x}_T, \varepsilon \eta) \\ g_{ij}^m(\mathbf{x}_T, \eta) = g_{ij}(\mathbf{x}_T, \varepsilon \eta), \quad \text{for } i, j = 1, 2, 3 \\ g^m(\mathbf{x}_T, \eta) = g(\mathbf{x}_T, \varepsilon \eta) \end{cases}.$$

Observe that $g_{\alpha\beta}^m(\mathbf{x}_T, \eta) = g_{\alpha\beta}^0(\mathbf{x}_T) - 2\varepsilon \eta b_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_T) + \varepsilon^2 \eta^2 c_{\alpha\beta}(\mathbf{x}_T)$, hence for $l \in \mathbb{N}$, $\partial_\eta^l g_{\alpha\beta}^m = O(\varepsilon^l)$, while $\partial_\alpha^l g_{\alpha\beta}^m = O(1)$. Denote by

$$\delta d\mathbf{E} = a_i^m(\mathbf{x}_T, \eta) dx^i, \text{ in } \mathcal{O}_m^\varepsilon.$$

Applying formula (9.63) with the metric given by (9.20), and performing the rescaling $x_3 = \varepsilon\eta$, we infer,

$$\begin{aligned} a_\lambda^m = & -\frac{1}{\varepsilon^2} \partial_\eta^2 \mathcal{E}_\lambda^m + \frac{1}{\varepsilon} \left(\partial_\eta \partial_\lambda \mathcal{E}_3^m + \epsilon_{\alpha\beta 3} \epsilon_{\iota\kappa 3} \frac{g_{\lambda\iota}^m}{\sqrt{g^m}} \frac{\partial_\eta}{\varepsilon} \left(\frac{g_{\alpha\kappa}^m}{\sqrt{g^m}} \right) \partial_\eta \mathcal{E}_\beta^m \right) \\ & + \epsilon_{\alpha\beta 3} \epsilon_{\iota\kappa 3} \frac{g_{\lambda\iota}^m}{\sqrt{g^m}} \left(\partial_\kappa \left(\frac{1}{\sqrt{g^m}} \partial_\alpha \mathcal{E}_\beta^m \right) - \frac{\partial_\eta}{\varepsilon} \left(\frac{g_{\alpha\kappa}^m}{\sqrt{g^m}} \right) \partial_\beta \mathcal{E}_3^m \right), \end{aligned} \quad (9.23)$$

$$a_3^m = \frac{1}{\varepsilon} \epsilon_{\alpha\beta 3} \epsilon_{\iota\kappa 3} \partial_\kappa \left(\frac{g_{\alpha\iota}^m}{\sqrt{g^m}} \partial_\eta \mathcal{E}_\beta^m \right) + \epsilon_{\alpha\beta 3} \epsilon_{\iota\kappa 3} \partial_\alpha \left(\frac{g_{\beta\iota}^m}{\sqrt{g^m}} \partial_\kappa \mathcal{E}_3^m \right). \quad (9.24)$$

The divergence free condition $\delta \mathbf{E}^m = 0$ with equality (9.61) writes then

$$\frac{1}{\varepsilon} \partial_\eta \mathcal{E}_3^m + \frac{1}{\sqrt{g^m}} \frac{\partial_\eta}{\varepsilon} (\sqrt{g^m}) \mathcal{E}_3^m + \epsilon_{\alpha\beta 3} \epsilon_{\iota\kappa 3} \frac{1}{\sqrt{g^m}} \partial_\alpha \left(\frac{g_{\kappa\beta}^m}{\sqrt{g^m}} \mathcal{E}_\iota^m \right) = 0. \quad (9.25)$$

The transmission conditions (9.22) in $x_3 = \varepsilon$ become

$$\frac{1}{\mu_e} (\partial_3 E_\lambda - \partial_\lambda E_3) |_{x_3=\varepsilon^+} = \frac{1}{\mu_m} \left(\frac{1}{\varepsilon} \partial_\eta \mathcal{E}_\lambda^m - \partial_\lambda \mathcal{E}_3^m \right) \Big|_{\eta=1} \quad (9.26a)$$

$$E_\lambda |_{x_3=\varepsilon^+} = \mathcal{E}_\lambda^m |_{\eta=1}. \quad (9.26b)$$

The transmission conditions (9.22) in $x_3 = 0$ write

$$\frac{1}{\mu_m} \left(\frac{1}{\varepsilon} \partial_\eta \mathcal{E}_\lambda^m - \partial_\lambda \mathcal{E}_3^m \right) \Big|_{\eta=0} = \frac{1}{\mu_c} (\partial_3 E_\lambda - \partial_\lambda E_3) |_{x_3=0^-} \quad (9.27a)$$

$$\mathcal{E}_\lambda^m |_{\eta=0} = E_\lambda |_{x_3=0^-}, \quad (9.27b)$$

and the transmission conditions for the normal components E_3 are

$$q_e E_3 |_{x_3=\varepsilon^+} = q_m \mathcal{E}_3^m |_{\eta=1}, \quad q_m \mathcal{E}_3^m |_{\eta=0} = q_c E_3 |_{x_3=0^-}. \quad (9.28)$$

9.5 Ansatz and formal expansion

We set now our ansatz. We look solutions written as formal series in ε

$$\mathbf{E}|_{\mathcal{O}_\varepsilon} = \tilde{\mathbf{E}}^{\mathbf{e},0}|_{\mathcal{O}_\varepsilon} + \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}^{\mathbf{e},1}|_{\mathcal{O}_\varepsilon} + \cdots, \text{ in } \mathcal{O}_\varepsilon, \quad (9.29a)$$

$$\mathbf{E}|_{\mathcal{O}_c} = \mathbf{E}^{\mathbf{c},0} + \varepsilon \mathbf{E}^{\mathbf{c},1} + \cdots, \text{ in } \mathcal{O}_c, \quad (9.29b)$$

and in the cylinder $\Gamma \times (0, 1)$,

$$\mathbf{E}|_{\mathcal{O}_m} \circ \Phi(\mathbf{x}_T, \varepsilon\eta) = \mathcal{E}^{m,0}(\mathbf{x}_T, \eta) + \varepsilon \mathcal{E}^{m,1}(\mathbf{x}_T, \eta) + \cdots, \quad (9.29c)$$

where the 1-forms $(\tilde{\mathbf{E}}^{e,n})_{n \in \mathbb{N}}$, and $(\mathbf{E}^{c,n})_{n \in \mathbb{N}}$ are defined in ε -independent domains. We emphasize that the sequence $(\tilde{\mathbf{E}}^{e,n})_{n \in \mathbb{N}}$ is defined in $(\mathcal{O}_m^\varepsilon)^\mathbb{N}$ even if its associated serie does not approach \mathbf{E} in the thin layer.

Remark 9.5.1 The 1-forms $(\mathcal{E}^{m,n})_{n \in \mathbb{N}}$ are profiles defined in the cylinder $\Gamma \times (0, 1)$; note the difference with the 1-forms $(\mathbf{E}^{c,n})_{n \in \mathbb{N}}$ and $(\tilde{\mathbf{E}}^{e,n})_{n \in \mathbb{N}}$. These profiles are the key-point of the following asymptotic expansion. \triangle

In \mathcal{V}_Γ , for $n \in \mathbb{N}$, we denote by

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^{e,n} &= \tilde{E}_i^{e,n}(\mathbf{x}_\Gamma, x_3) dx^i, & \mathbf{E}^{c,n} &= E_i^{c,n}(\mathbf{x}_\Gamma, x_3) dx^i, \\ \mathcal{E}^{m,n} &= \mathcal{E}_i^{m,n}(\mathbf{x}_\Gamma, \eta) dx^i, & \eta &= x_3/\varepsilon. \end{aligned}$$

Our aim is to identify the first two terms of the sequences and to estimate the remainder term. Suppose that for $n \in \mathbb{N}$, the forms $(\tilde{E}_k^{e,n})_{k=1,2,3}$ are as regular as necessary. Using formal Taylor expansion, we infer for $l = 0, 1$

$$\partial_j^l \tilde{E}_k^{e,n}|_{x_3=\varepsilon^+} = \partial_j^l \tilde{E}_k^{e,n}|_{x_3=0^+} + \varepsilon \partial_3 \partial_j^l \tilde{E}_k^{e,n}|_{x_3=0^+} + \dots \quad (9.30)$$

It is convenient to define \mathbf{E}^n for $n \in \mathbb{N}$ by

$$\mathbf{E}^n = \tilde{\mathbf{E}}^{e,n}, \text{ in } \mathcal{O}_e, \quad \mathbf{E}^n = \mathbf{E}^{c,n}, \text{ in } \mathcal{O}_c.$$

We are now ready to derive formally our asymptotics. Replace the coefficients $(\mathcal{E}_j^m)_{j=1,\dots,3}$ and $(E_j)_{j=1,\dots,3}$ in equations (9.23)–(9.24)–(9.25) and in transmission conditions (9.26)–(9.27)–(9.28) by their respective formal expansion (9.29), and use the formal Taylor expansion (9.30). Observe that for any $n \in \mathbb{N}$, we necessarily have

$$\delta d\mathbf{E}^n - \tilde{\mu} \tilde{q} \mathbf{E}^n = \delta_0^n \mathbf{J}, \text{ in } \mathcal{O}_e \cup \mathcal{O}_c, \quad N_{\partial\mathcal{O}} \wedge \mathbf{E}^n|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \text{ on } \partial\mathcal{O}. \quad (9.31a)$$

$$\text{Observe that } \delta \mathbf{E}^n = 0, \quad \text{in } \mathcal{O}_c \cup \mathcal{O}_e, \quad (9.31b)$$

since $\delta \mathbf{J} = 0$. It remains to build the appropriate transmission conditions by identifying the terms with the same power of ε .

9.5.1 Order 0

The term of order -2 in (9.23) vanishes hence $\partial_\eta^2 \mathcal{E}_\alpha^{m,0} = 0$. From the divergence free condition (9.25) we infer $\partial_\eta \mathcal{E}_3^{m,0} = 0$. Equality (9.26a) implies $\partial_\eta \mathcal{E}_\alpha^{m,0} = 0$. Therefore the coefficients $\mathcal{E}_j^{m,0}$ depend only on \mathbf{x}_Γ . From (9.26b)–(9.27b)–(9.28) we infer for $n = 0, 1$

$$\partial_\beta^n \tilde{E}_\alpha^{e,0}|_{x_3=0^+} = \partial_\beta^n E_\alpha^{c,0}|_{x_3=0^-}, \quad (9.32a)$$

$$q_e \partial_\beta^n \tilde{E}_3^{e,0}|_{x_3=0^+} = q_c \partial_\beta^n E_3^{c,0}|_{x_3=0^-}. \quad (9.32b)$$

9.5.2 Order 1

Since $\partial_\eta \mathcal{E}_\alpha^{m,0}$ and the terms of order -1 in (9.23) vanish, we infer

$$\partial_\eta^2 \mathcal{E}_\alpha^{m,1} = 0. \quad (9.33)$$

Hence $\partial_\eta \mathcal{E}_\alpha^{m,1}$ is constant with respect to η . Therefore, according to (9.26a)

$$\frac{1}{\mu_e} \left(\partial_3 \tilde{E}_\alpha^{e,0} - \partial_\alpha \tilde{E}_3^{e,0} \right) |_{x_3=0^+} = \frac{1}{\mu_c} \left(\partial_3 E_\alpha^{c,0} - \partial_\alpha E_3^{c,0} \right) |_{x_3=0^-}. \quad (9.34)$$

According to (9.31)–(9.32)–(9.34) the 1-forms $\tilde{\mathbf{E}}^{e,0}$ and $\mathbf{E}^{c,0}$ satisfy the elliptic problem (9.10). According to (9.27b) and to (9.28), we infer

$$\mathcal{E}_\alpha^{m,0}(\mathbf{x}_T, \eta) = E_\alpha^{c,0}(\mathbf{x}_T, 0), \quad (9.35a)$$

$$\mathcal{E}_3^{m,0}(\mathbf{x}_T, \eta) = \frac{q_c}{q_m} E_3^{c,0}(\mathbf{x}_T, 0). \quad (9.35b)$$

Therefore the terms of order 0 are entirely determined. According to (9.27a), using (9.35) and since $\partial_\eta \mathcal{E}_\alpha^{m,1}$ does not depend on η accordingly (9.33), we infer

$$\partial_\eta \mathcal{E}_\alpha^{m,1}(\mathbf{x}_T, \eta) = \frac{q_c}{q_m} \partial_\alpha E_3^{c,0} |_{x_3=0^-} + \frac{\mu_m}{\mu_c} \left(\partial_3 E_\alpha^{c,0} - \partial_\alpha E_3^{c,0} \right) |_{x_3=0^-}. \quad (9.36)$$

The transmission conditions follow

$$\tilde{E}_\alpha^{e,1} |_{x_3=0^+} + \partial_3 \tilde{E}_\alpha^{e,0} |_{x_3=0^+} = \partial_\eta \mathcal{E}_\alpha^{m,1} + \mathcal{E}_\alpha^{m,1} |_{\eta=0},$$

and

$$\mathcal{E}_\alpha^{m,1} |_{\eta=0} = E_\alpha^{c,1} |_{x_3=0^-}.$$

Therefore we infer

$$\tilde{E}_\alpha^{e,1} |_{x_3=0^+} - E_\alpha^{c,1} |_{x_3=0^-} = \partial_\eta \mathcal{E}_\alpha^{m,1} - \partial_3 \tilde{E}_\alpha^{e,0} |_{x_3=0^+}.$$

Using (9.36) and according to (9.32) and (9.34) we infer

$$\begin{aligned} \tilde{E}_\alpha^{e,1} |_{x_3=0^+} - E_\alpha^{c,1} |_{x_3=0^-} &= \left(\frac{q_c}{q_m} - \frac{q_c}{q_e} \right) \partial_\alpha E_3^{c,0} |_{x_3=0^-} \\ &\quad + \frac{\mu_m - \mu_e}{\mu_c} \left(\partial_3 E_\alpha^{c,0} - \partial_\alpha E_3^{c,0} \right) |_{x_3=0^-}. \end{aligned} \quad (9.37)$$

The divergence free condition leads to

$$\partial_\eta \mathcal{E}_3^{m,1} = -\frac{1}{\sqrt{g^0}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\iota\kappa 3} \partial_\alpha \left(\frac{g_{\kappa\beta}^0}{\sqrt{g^0}} E_\iota^{c,0} \right) |_{x_3=0^-} + 2\mathcal{H} \frac{q_c}{q_m} E_3^{c,0} |_{x_3=0^-}, \quad (9.38)$$

where \mathcal{H} is given by (9.21). Transmission condition (9.28) implies

$$q_e \tilde{E}_3^{e,1}|_{x_3=0^+} + q_e \partial_3 \tilde{E}_3^{e,0}|_{x_3=0^+} = q_m \partial_\eta \mathcal{E}_3^{m,1} + q_c E_3^{c,1}|_{x_3=0^-}. \quad (9.39)$$

According to (9.10) $\mathbf{E}^{c,0}$ satisfy the divergence free condition hence

$$-\frac{1}{\sqrt{g^0}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\iota\kappa 3} \partial_\alpha \left(\frac{g_{\kappa\beta}^0}{\sqrt{g^0}} E_\iota^{c,0} \right) \Big|_{x_3=0^-} = \partial_3 E_3^{c,0}|_{x_3=0^-} - 2\mathcal{H} E_3^{c,0}|_{x_3=0^-}, \quad (9.40)$$

and similarly for $\tilde{\mathbf{E}}^{e,0}$ by replacing $E_i^{c,0}$ by $\tilde{E}_i^{e,0}$. From (9.38)–(9.40) we infer

$$\partial_\eta \mathcal{E}_3^{m,1} = \partial_3 E_3^{c,0}|_{x_3=0^-} + 2\mathcal{H} \left(\frac{q_c}{q_m} - 1 \right) E_3^{c,0}|_{x_3=0^-}. \quad (9.41)$$

Moreover using (9.32) in (9.40) we infer

$$q_e \partial_3 \tilde{E}_3^{e,0}|_{x_3=0^+} = q_e \partial_3 E_3^{c,0}|_{x_3=0^-} - 2\mathcal{H}(q_e - q_c) E_3^{c,0}|_{x_3=0^-},$$

and therefore (9.39) with equality (9.21) implies

$$q_e \tilde{E}_3^{e,1}|_{x_3=0^+} - q_c E_3^{c,1}|_{x_3=0^-} = (q_m - q_e) \frac{1}{\sqrt{g}|_{x_3=0}} \partial_3 \left(\sqrt{g} \tilde{E}_3^{e,0} \right) \Big|_{x_3=0^+}. \quad (9.42)$$

9.5.3 Order 2

Since $\partial_\eta \mathcal{E}_\alpha^{m,0} = 0$ we identify the terms in ε^2 in (9.23) to infer

$$\begin{aligned} \partial_\eta^2 \mathcal{E}_\lambda^{m,2} &= \partial_\eta \partial_\lambda \mathcal{E}_3^{m,1} + \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\iota\kappa 3} \frac{g_{\lambda\iota}^0}{\sqrt{g^0}} \left\{ \frac{\partial_\eta}{\varepsilon} \left(\frac{g_{\alpha\kappa}^m}{\sqrt{g^m}} \right) \Big|_{\eta=0} \partial_\eta \mathcal{E}_\beta^{m,1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\partial_\kappa \left(\frac{1}{\sqrt{g^0}} \partial_\alpha \mathcal{E}_\beta^{m,0} \right) - \frac{\partial_\eta}{\varepsilon} \left(\frac{g_{\alpha\kappa}^m}{\sqrt{g^m}} \right) \Big|_{\eta=0} \partial_\beta \mathcal{E}_3^{m,0} \right) \right\} + \mu_m q_m \sqrt{g^0} \mathcal{E}_\lambda^{m,0}. \end{aligned} \quad (9.43)$$

Since the right-hand side of the previous equality does not depend on η , we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_e} \left(\partial_3 \tilde{E}_\lambda^{e,1} - \partial_\lambda \tilde{E}_3^{e,1} \right) \Big|_{x_3=0^+} - \frac{1}{\mu_c} \left(\partial_3 E_\lambda^{c,1} - \partial_\lambda E_3^{c,1} \right) \Big|_{x_3=0^-} &= \frac{1}{\mu_m} \left(\partial_\eta^2 \mathcal{E}_\lambda^{m,2} \right. \\ &\quad \left. - \partial_\lambda \partial_\eta \mathcal{E}_3^{m,1} \right) - \frac{1}{\mu_e} \left(\partial_3^2 \tilde{E}_\lambda^{e,0}|_{x_3=0^+} - \partial_\lambda \partial_3 \tilde{E}_3^{e,0}|_{x_3=0^+} \right). \end{aligned}$$

Since $\delta d \tilde{\mathbf{E}}^{\mathbf{e},0} - \mu_{\mathbf{e}} q_{\mathbf{e}} \tilde{\mathbf{E}}^{\mathbf{e},0} = 0$, explicit formulae of Appendix 2 imply

$$\begin{aligned} \partial_3^2 \tilde{E}_j^{\mathbf{e},0} |_{x_3=0^+} = & \left[\mu_{\mathbf{e}} q_{\mathbf{e}} \sqrt{g} \tilde{E}_j^{\mathbf{e},0} + \partial_3 \partial_\lambda \tilde{E}_3^{\mathbf{e},0} + \epsilon_{\alpha\beta 3} \epsilon_{\iota\kappa 3} \frac{g_{\lambda\iota}}{\sqrt{g}} \partial_3 \left(\frac{g_{\alpha\kappa}}{\sqrt{g}} \right) \partial_3 \tilde{E}_\beta^{\mathbf{e},0} \right. \\ & \left. + \epsilon_{\alpha\beta 3} \epsilon_{\iota\kappa 3} \frac{g_{\lambda\iota}}{\sqrt{g}} \left(\partial_\kappa \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\alpha \tilde{E}_\beta^{\mathbf{e},0} \right) - \partial_3 \left(\frac{g_{\alpha\kappa}}{\sqrt{g}} \right) \partial_\alpha \tilde{E}_3^{\mathbf{e},0} \right) \right] \Big|_{x_3=0^+}. \end{aligned}$$

According to the transmission condition at the order 0, the following equalities hold

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_{\mathbf{e}}} \left(\partial_\lambda \tilde{E}_3^{\mathbf{e},0} - \partial_3 \tilde{E}_\lambda^{\mathbf{e},0} \right) |_{x_3=0^+} &= \frac{1}{\mu_{\mathbf{m}}} \left(\partial_\lambda \mathcal{E}_3^{\mathbf{m},0} - \partial_\eta \mathcal{E}_\lambda^{\mathbf{m},1} \right) |_{\eta=0}, \\ \tilde{E}_\lambda^{\mathbf{e},0} |_{x_3=0^+} &= \mathcal{E}_\lambda^{\mathbf{m},0} |_{\eta=0}, \end{aligned}$$

hence we infer the following transmission conditions

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_{\mathbf{e}}} \left(\partial_3 \tilde{E}_\lambda^{\mathbf{e},1} - \partial_\lambda \tilde{E}_3^{\mathbf{e},1} \right) - \frac{1}{\mu_{\mathbf{c}}} \left(\partial_3 E_\lambda^{\mathbf{c},1} - \partial_\lambda E_3^{\mathbf{c},1} \right) &= (q_{\mathbf{m}} - q_{\mathbf{e}}) \tilde{E}_\lambda^{\mathbf{e},0} |_{x_3=0^+} \\ &+ \left(\frac{1}{\mu_{\mathbf{m}}} - \frac{1}{\mu_{\mathbf{e}}} \right) \epsilon_{\alpha\beta 3} \epsilon_{\iota\kappa 3} \frac{g_{\lambda\alpha}}{\sqrt{g}} \partial_\beta \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\iota \tilde{E}_\kappa^{\mathbf{e},0} \right) \Big|_{x_3=0^+}. \end{aligned} \quad (9.44)$$

Therefore \mathbf{E}^1 satisfies (9.31) for $n = 1$ with the transmission conditions (9.37)–(9.44) written in local coordinates. Using equalities (9.36)–(9.41) we infer

$$\mathcal{E}_\lambda^{\mathbf{m},1}(\mathbf{x}_\Gamma, \eta) = \eta \partial_\eta \mathcal{E}_\lambda^{\mathbf{m},1} + E_\lambda^{\mathbf{c},1} |_{x_3=0^-}, \quad \mathcal{E}_3^{\mathbf{m},1}(\mathbf{x}_\Gamma, \eta) = \eta \partial_\eta \mathcal{E}_3^{\mathbf{m},1} + \frac{q_{\mathbf{c}}}{q_{\mathbf{m}}} E_3^{\mathbf{c},1} |_{x_3=0^-}.$$

Remark 9.5.2 The coefficients at the order 1 are now uniquely determined. Since

$$\partial_\eta \mathcal{E}_\alpha^{\mathbf{m},2} |_{\eta=0} = \partial_\alpha \mathcal{E}_3^{\mathbf{m},1} |_{\eta=0} - \frac{\mu_{\mathbf{m}}}{\mu_{\mathbf{c}}} \left(\partial_\alpha E_3^{\mathbf{c},1} - \partial_3 E_\alpha^{\mathbf{c},1} \right) |_{x_3=0^-},$$

$\partial_\eta \mathcal{E}_\lambda^{\mathbf{m},2}$ is uniquely determined by (9.43)

$$\partial_\eta \mathcal{E}_\lambda^{\mathbf{m},2} = \eta \partial_\eta^2 \mathcal{E}_\lambda^{\mathbf{m},2} + \partial_\alpha \mathcal{E}_3^{\mathbf{m},1} |_{\eta=0} - \frac{\mu_{\mathbf{m}}}{\mu_{\mathbf{c}}} \left(\partial_\alpha E_3^{\mathbf{c},1} - \partial_3 E_\alpha^{\mathbf{c},1} \right) |_{x_3=0^-}. \quad (9.45)$$

△

Remark 9.5.3 Transmission condition (9.42) might be obtained straightforward from (9.31)–(9.37)–(9.44). Writing $\delta d \tilde{\mathbf{E}}^{\mathbf{e},1} = \tilde{a}_i^{\mathbf{e},1} dx^i$ and $\delta d \mathbf{E}^{\mathbf{c},1} = a_i^{\mathbf{c},1} dx^i$ we infer

$$a_3^{\mathbf{c},1} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon_{\alpha\beta 3} \epsilon_{\iota\kappa 3} \partial_\alpha \left(\frac{g_{\beta\kappa}}{\sqrt{g}} \left(\partial_3 E_\iota^{\mathbf{c},1} - \partial_\iota E_3^{\mathbf{c},1} \right) \right),$$

and similarly for $\tilde{a}_3^{e,1}$ by replacing $E^{c,1}$ by $\tilde{E}^{e,1}$. According to (9.44) we have

$$\frac{1}{\mu_e} \tilde{a}_3^{e,1}|_{x_3=0^+} - \frac{1}{\mu_c} a_3^{c,1}|_{x_3=0^-} = \frac{(q_m - q_e)}{\sqrt{g}} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\iota\kappa 3} \partial_\alpha \left(\frac{g_{\beta\kappa}}{\sqrt{g}} \tilde{E}_\iota^{e,1} \right) \Big|_{x_3=0^+}.$$

The divergence free property of $\tilde{\mathbf{E}}^{e,0}$ applied in $x_3 = 0^+$ implies

$$\frac{1}{\mu_e} a_3^{e,1}|_{x_3=0^+} - \frac{1}{\mu_c} a_3^{c,1}|_{x_3=0^-} = -(q_m - q_e) \frac{1}{\sqrt{g}|_{x_3=0}} \partial_3 \left(\sqrt{g} \tilde{E}_3^{e,0} \right) \Big|_{x_3=0^+}.$$

Moreover we have

$$\frac{1}{\mu_e} a_3^{e,1}|_{x_3=0^+} + q_e \tilde{E}_3^{e,1}|_{x_3=0^+} = \frac{1}{\mu_c} a_3^{c,1}|_{x_3=0^-} + q_c E_3^{c,1}|_{x_3=0^-} = 0,$$

therefore, we infer

$$q_e \tilde{E}_3^{e,1}|_{x_3=0^+} - q_c E_3^{c,1}|_{x_3=0^-} = (q_m - q_e) \frac{1}{\sqrt{g}|_{x_3=0}} \partial_3 \left(\sqrt{g} \tilde{E}_3^{e,0} \right) \Big|_{x_3=0^+},$$

which is exactly condition (9.42). \triangle

9.6 Justification of the expansion

Let us rewrite the equations satisfied by the first two terms of the asymptotic expansion of \mathbf{E} in terms of differential forms. Denote by \mathbb{S} and \mathbb{T} the following forms

$$\begin{aligned} \mathbb{S} &= \left((q_m - q_e) \tilde{E}_\lambda^{e,0}|_{x_3=0^+} + \left(\frac{1}{\mu_m} - \frac{1}{\mu_e} \right) \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \epsilon_{\iota\kappa 3} \frac{g_{\lambda\alpha}}{\sqrt{g}} \partial_\beta \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \partial_\iota \tilde{E}_\kappa^{e,0}|_{x_3=0^+} \right) \right) dx^\lambda \\ \mathbb{T} &= \left(\left(\frac{q_c}{q_m} - \frac{q_c}{q_e} \right) \partial_\alpha E_3^{c,0}|_{x_3=0^-} + \frac{\mu_m - \mu_e}{\mu_c} (\partial_3 E_\alpha^{c,0} - \partial_\alpha E_3^{c,0})|_{x_3=0^-} \right) dx^\alpha. \end{aligned}$$

The reader easily verifies that the definitions (9.13)–(9.14) coincide with the above expressions of \mathbb{S} and \mathbb{T} . The 1-form \mathbf{E}^0 satisfies (9.10) in a weak sense and \mathbf{E}^1 satisfy (9.31) with the following transmission conditions on Γ accordingly (9.37)–(9.42)

$$\frac{1}{\mu_e} \text{int}(N_\Gamma) d\tilde{\mathbf{E}}^{e,1}|_{\Gamma^+} - \frac{1}{\mu_c} \text{int}(N_\Gamma) d\mathbf{E}^{c,1}|_{\Gamma^-} = \mathbb{S}, \quad (9.46a)$$

$$N_\Gamma \wedge \tilde{\mathbf{E}}^{e,1}|_{\Gamma^+} - N_\Gamma \times \mathbf{E}^{c,1}|_{\Gamma^-} = N_\Gamma \times \mathbb{T}. \quad (9.46b)$$

Observe⁷ that accordingly (9.42)

$$\delta\mathbb{S} = -(q_m - q_e) \frac{1}{\sqrt{g}|_{x_3=0}} \partial_3 \left(\sqrt{g} \tilde{E}_3^{e,0} \right) \Big|_{x_3=0^+}. \quad (9.47)$$

In the cylinder $\Gamma \times (0, 1)$, the 1-form $\mathcal{E}^{m,0}$ equals

$$\mathcal{E}^{m,0} = E_\alpha^{c,0}|_{x_3=0^-} dx^\alpha + \frac{q_c}{q_m} E_3^{c,0}|_{x_3=0^-} dx^3, \quad (9.48)$$

while the 1-form $\mathcal{E}^{m,1}$ equals

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{m,1} = & \left\{ E_\alpha^{c,1}|_{x_3=0^-} + \eta \left(\frac{q_c}{q_m} \partial_\alpha E_3^{c,0} + \frac{\mu_m}{\mu_c} (\partial_3 E_\alpha^{c,0} - \partial_\alpha E_3^{c,0}) \right) \Big|_{x_3=0^-} \right\} dx^\alpha \\ & + \left\{ \frac{q_c}{q_m} E_3^{c,1}|_{x_3=0^-} + \eta \left(\partial_3 E_3^{c,0} + 2\mathcal{H} \left(\frac{q_m}{q_c} - 1 \right) E_3^{c,0} \right) \Big|_{x_3=0^-} \right\} dx^3. \end{aligned} \quad (9.49)$$

9.6.1 Regularity results

We present now the regularity of the 1-forms \mathbf{E}^0 and \mathbf{E}^1 .

Proposition 9.4 *Let Hypothesis 9.1 hold. Moreover let $s \geq 0$ and \mathbf{J} belong to $H^{1+s}\Omega^1(\mathcal{O}_e^{d_0})$. Then the 1-forms \mathbf{E}^0 and \mathbf{E}^1 exist and are unique. Moreover the following regularity results hold*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^{e,0} &\in H^{3+s}\Omega^1(\mathcal{O}_e), & \mathbf{E}^{c,0} &\in H^{3+s}\Omega^1(\mathcal{O}_c), \\ \tilde{\mathbf{E}}^{e,1} &\in H^{2+s}\Omega^1(\mathcal{O}_e), & \mathbf{E}^{c,1} &\in H^{2+s}\Omega^1(\mathcal{O}_c). \end{aligned}$$

PREUVE. All the assertions concerning \mathbf{E}^0 are proved in the above Proposition 9.2. Since $\tilde{\mathbf{E}}^{e,0}$ and $\mathbf{E}^{c,0}$ belong respectively to $H^{3+s}\Omega^1(\mathcal{O}_e)$ and $H^{3+s}\Omega^1(\mathcal{O}_c)$, the forms \mathbb{S} and \mathbb{T} belong to the following Sobolev spaces

$$\mathbb{S} \in H^{1/2+s}\Omega^1(\Gamma), \quad \mathbb{T} \in H^{3/2+s}\Omega^1(\Gamma).$$

Moreover accordingly (9.47), $\delta\mathbb{S} \in H^{3/2+s}(\Gamma)$. Let $C \in H^{2+s}\Omega^1(\mathcal{O}_c)$ such that

$$\delta C = 0, \text{ in } \mathcal{O}_c, \quad \begin{cases} N_\Gamma \wedge C|_\Gamma = N_\Gamma \times \mathbb{T}, \\ \frac{1}{\mu_c} \text{int}(N_\Gamma) dC|_\Gamma = \mathbb{S}, \end{cases}, \quad \begin{cases} q_c \text{int}(N_\Gamma) C|_\Gamma = \delta\mathbb{S}, \\ \delta(q_c C|_\Gamma) = 0. \end{cases}$$

⁷Since $q_e \text{int}(N_\Gamma) \tilde{\mathbf{E}}^{e,1}|_{\Gamma^+} = \text{int}(N_\Gamma) \left((1/\mu_e) \delta d \tilde{\mathbf{E}}^{e,1}|_{\Gamma^+} \right)$ using (9.59) since $dN_\Gamma = 0$ we infer $\text{int}(N_\Gamma) \left((1/\mu_e) \delta d \tilde{\mathbf{E}}^{e,1}|_{\Gamma^+} \right) = -\delta \left((1/\mu_e) \text{int}(N_\Gamma) d \tilde{\mathbf{E}}^{e,1}|_{\Gamma^+} \right)$, and similarly for $\mathbf{E}^{c,1}$. Therefore accordingly (9.46a) we infer $q_e \text{int}(N_\Gamma) \tilde{\mathbf{E}}^{e,1}|_{\Gamma^+} - q_c \text{int}(N_\Gamma) \mathbf{E}^{c,1}|_{\Gamma^-} = -\delta\mathbb{S}$, hence (9.47) according to (9.42).

Observe that $\delta dC - \mu_c q_c C$ belongs to $H^s \Omega^1(\mathcal{O}_c)$. Denote by \mathbb{U} the following 1-form

$$\mathbb{U} = \tilde{\mathbf{E}}^{1,e}, \text{ in } \mathcal{O}_e, \quad \mathbb{U} = \mathbf{E}^{1,c} - C, \text{ in } \mathcal{O}_c.$$

Then \mathbb{U} satisfies

$$\begin{aligned} \delta d\mathbb{U} - \mu_e q_e \mathbb{U} &= 0, \text{ in } \mathcal{O}_e, \\ \delta d\mathbb{U} - \mu_c q_c \mathbb{U} &= -\delta dC + \mu_c q_c C, \text{ in } \mathcal{O}_c, \\ N_{\partial\mathcal{O}} \wedge \mathbb{U}|_{\partial\mathcal{O}} &= 0, \end{aligned}$$

with the following homogeneous transmission conditions on Γ

$$[N_\Gamma \wedge \mathbb{U}]_\Gamma = 0, \quad \left[\frac{1}{\tilde{\mu}} \text{int}(N_\Gamma) d\mathbb{U} \right]_\Gamma = 0, \quad [\tilde{q} \text{int}(N_\Gamma) \mathbb{U}]_\Gamma = 0.$$

Performing as we did in Proposition 9.2, we infer Proposition 9.4. ■

The next Proposition give the regularity of the 1-form $\mathcal{E}^{m,0}$, $\mathcal{E}^{m,1}$ and $\mathcal{E}^{m,2}$. Its proof easily comes from Proposition 9.4 and from the explicit expressions of the component of $\mathcal{E}^{m,n}$, for $n = 0, 1, 2$, given in Section 9.5.

Proposition 9.5 *Let Hypothesis 9.1 hold. Moreover let $s \geq 0$ and suppose that \mathbf{J} belongs to $H^{1+s} \Omega^1(\mathcal{O}_e^{d_0})$. By abuse of notations⁸, we define $\mathcal{E}^{m,2}$ using (9.45) by*

$$\mathcal{E}^{m,2} = \int_0^{x_3/\varepsilon} \partial_\eta \mathcal{E}_\alpha^{m,2} d\eta dx^\alpha.$$

Denote by $C^\infty \Omega^1([0, 1], H^{5/2+s-n} \Omega^1(\Gamma))$ is the space of the 1-forms, which are smooth in the normal variable η , and which belong to $H^{5/2+s-n} \Omega^1(\Gamma)$ at given $\eta \in [0, 1]$.

Then for $n = 0, 1, 2$, $\mathcal{E}^{m,n} \in C^\infty \Omega^1([0, 1], H^{5/2+s-n} \Omega^1(\Gamma))$.

9.6.2 Convergence

Suppose that Hypothesis 9.1 holds, and let the source current density \mathbf{J} belong to $H^3 \Omega^1(\mathcal{O}_e^{d_0})$, with $\delta \mathbf{J} = 0$. It is convenient to define

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{app}^e &= \tilde{\mathbf{E}}^{e,0} + \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}^{e,1}, \text{ in } \mathcal{O}_e^\varepsilon, \quad \mathbf{E}_{app}^c = \mathbf{E}^{c,0} + \varepsilon \mathbf{E}^{c,1}, \text{ in } \mathcal{O}_c, \\ \forall (\mathbf{x}_T, x_3) \in \Gamma \times (0, \varepsilon), \quad \mathbf{E}_{app}^m \circ \Phi(\mathbf{x}_T, x_3) &= \sum_{n=0}^2 \varepsilon^n \mathcal{E}^{m,n}(\mathbf{x}_T, x_3/\varepsilon), \end{aligned}$$

⁸Since $\mathcal{E}^{m,2}$ vanishes in $x_3 = 0$, it is not the third coefficient of the profile in $\Gamma \times (0, 1)$.

and let \mathbf{E}_{app} equal to \mathbf{E}_{app}^e in $\mathcal{O}_e^\varepsilon$, \mathbf{E}_{app}^c in \mathcal{O}_c and to \mathbf{E}_{app}^m in $\mathcal{O}_m^\varepsilon$. According to the construction of the coefficients $(\mathcal{E}^{m,n})_{n=0,1,2}$ and using Proposition 9.5, there exists a 1-form $\mathbb{G} \in C^\infty \Omega^1([0, 1], H^{1/2} \Omega^1(\Gamma))$, such that

$$\delta d \mathbf{E}_{app}^m - \mu_m q_m \mathbf{E}_{app}^m = \varepsilon \mathbb{G} \circ \Phi^{-1}, \text{ in } \mathcal{O}_m^\varepsilon,$$

and for an ε -independent constant $C > 0$,

$$\sup_{\eta \in [0,1]} \|\mathbb{G}(\cdot, \eta)\|_{H^{1/2} \Omega^1(\Gamma)} \leq C, \quad \sup_{\eta \in [0,1]} \|\delta \mathbb{G}(\cdot, \eta)\|_{H^{3/2}(\Gamma)} \leq C.$$

Define \mathbb{W} by $\mathbb{W} = \mathbf{E} - \mathbf{E}_{app}$ and denote by \mathbb{W}^e , \mathbb{W}^m and \mathbb{W}^c the respective restrictions of \mathbb{W} to $\mathcal{O}_e^\varepsilon$, $\mathcal{O}_m^\varepsilon$ and \mathcal{O}_c . In local coordinates, $\mathbb{W}^e = W_i^e dx^i$, $\mathbb{W}^m = W_i^m dx^i$ and $\mathbb{W}^c = W_i^c dx^i$. Theorem 9.3.5 is a straightforward corollary of the following result.

Theorem 9.6.1 *There exists an ε -independent constant $C > 0$ such that*

$$\|\mathbb{W}^e\|_{H\Omega^1(d, \delta, \mathcal{O}_e^\varepsilon)} + \sqrt{\varepsilon} \|\mathbb{W}^m\|_{H\Omega^1(d, \delta, \mathcal{O}_m^\varepsilon)} + \|\mathbb{W}^c\|_{H\Omega^1(d, \delta, \mathcal{O}_c)} \leq C \varepsilon^2.$$

PREUVE. The 1-form \mathbb{W} satisfies

$$\delta d \mathbb{W} - \mu q \mathbb{W} = \varepsilon 1_{\mathcal{O}_m^\varepsilon} \mathbb{G}, \text{ in } \mathcal{O}_e^\varepsilon \cup \mathcal{O}_m^\varepsilon \cup \mathcal{O}_c, \quad N_{\partial \mathcal{O}} \wedge \mathbb{W}^e|_{\partial \mathcal{O}} = 0, \quad \text{on } \partial \mathcal{O},$$

with the following transmission conditions for $\mathcal{S} \in \{\Gamma_\varepsilon, \Gamma\}$

$$[N_{\mathcal{S}} \wedge \mathbb{W}]_{\mathcal{S}} = -[N_{\mathcal{S}} \times \mathbf{E}_{app}]_{\mathcal{S}}, \quad (9.50a)$$

$$\left[\frac{1}{\mu} \text{int}(N_{\mathcal{S}}) d\mathbb{W} \right]_{\mathcal{S}} = - \left[\frac{1}{\mu} \text{int}(N_{\mathcal{S}}) d\mathbf{E}_{app} \right]_{\mathcal{S}}. \quad (9.50b)$$

Let $\mathbf{E}_{app}^e = E_i^{e,app} dx^i$. Accordingly Proposition 9.4 $\mathbf{E}_{app}^e \in H^4 \Omega^1(\mathcal{O}_e)$. Hence there exists $f_\alpha \in H^{1/2}(\Gamma)$ and $g_j \in H^{3/2}(\Gamma)$ such that

$$\begin{aligned} (\partial_3 E_\alpha^{e,app} - \partial_\alpha E_3^{e,app})|_{x_3=\varepsilon} &= \sum_{l=0,1} \varepsilon^l \partial_3^l (\partial_3 E_\alpha^{e,app} - \partial_\alpha E_3^{e,app})|_{x_3=0^+} + \varepsilon^2 f_\alpha, \\ E_j^{e,app}|_{x_3=\varepsilon} &= E_j^{e,app}|_{x_3=0^+} + \varepsilon \partial_3 E_j^{e,app}|_{x_3=0^+} + \varepsilon^2 g_j. \end{aligned}$$

Moreover there exists a ε -independent constant $C > 0$ such that

$$|f_\alpha|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leq C, \quad |g_j|_{H^{3/2}(\Gamma)} \leq C. \quad (9.51)$$

After simple calculations involving the explicit expressions of $(\mathcal{E}^{m,n})_{n=0,1,2}$ in local coordinates, transmission conditions (9.50) are written

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_e} (\partial_3 W_\alpha^e - \partial_\alpha W_3^e) |_{x_3=\varepsilon^+} &= \frac{1}{\mu_m} (\partial_3 W_\alpha^m - \partial_\alpha W_3^m) |_{x_3=\varepsilon^-} + \frac{\varepsilon^2}{\mu_e} f_\alpha, \\ \frac{1}{\mu_c} (\partial_3 W_\alpha^c - \partial_\alpha W_3^c) |_{x_3=0^-} &= \frac{1}{\mu_m} (\partial_3 W_\alpha^m - \partial_\alpha W_3^m) |_{x_3=0^+}, \\ W_\alpha^e |_{x_3=\varepsilon^+} &= W_\alpha^m |_{x_3=\varepsilon^-} + \varepsilon^2 g_\alpha, \text{ and } W_\alpha^c |_{x_3=0^-} = W_\alpha^m |_{x_3=0^+}. \end{aligned}$$

Observe that $\delta \mathbb{W} = -\frac{\varepsilon}{\mu_m q_m} 1_{\mathcal{O}_\varepsilon} \delta \mathbb{G}$, and the following equalities hold

$$q_e W_3^e |_{x_3=\varepsilon^+} = q_m W_3^m |_{x_3=\varepsilon^-} + q_e \varepsilon^2 g_3, \quad q_c W_3^c |_{x_3=0^-} = q_m W_3^m |_{x_3=0^+}.$$

We choose $\mathbb{P} = p_i dx^i$ in $H^2 \Omega^1(\mathcal{O}_\varepsilon)$ such that

$$N_{\partial \mathcal{O}} \wedge \mathbb{P} |_{\partial \mathcal{O}} = 0, \text{ and } \mathbb{P} |_{x_3=\varepsilon^+} = g_i(\mathbf{x}_T) dx^i.$$

Since for $\varepsilon \in (0, d_0/2)$, the domain \mathcal{O}_ε satisfies $\mathcal{O}_e \setminus (\mathcal{V}_T \cap \mathcal{O}_e) \subset \mathcal{O}_\varepsilon \subset \mathcal{O}_e$, and according to (9.51), there exists an ε -independent constant $C > 0$ such that

$$\|\mathbb{P}\|_{H^2 \Omega^1(\mathcal{O}_\varepsilon)} \leq C.$$

Defining $\widetilde{\mathbb{W}} = \mathbb{W} + \varepsilon^2 1_{\mathcal{O}_\varepsilon} \mathbb{P}$, we infer

$$\delta d \widetilde{\mathbb{W}} - \mu q \widetilde{\mathbb{W}} = \varepsilon^2 1_{\mathcal{O}_\varepsilon} (\delta d \mathbb{P} - \mu_e q_e \mathbb{P}) + \varepsilon 1_{\mathcal{O}_\varepsilon} \mathbb{G}, \text{ in } \mathcal{O}, \quad N_{\partial \mathcal{O}} \wedge \widetilde{\mathbb{W}} |_{\partial \mathcal{O}} = 0, \quad \text{on } \partial \mathcal{O},$$

and the following transmission conditions hold

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu_e} (\partial_3 \widetilde{W}_\alpha^e - \partial_\alpha \widetilde{W}_3^e) |_{x_3=\varepsilon^+} &= \frac{1}{\mu_m} (\partial_3 \widetilde{W}_\alpha^m - \partial_\alpha \widetilde{W}_3^m) |_{x_3=\varepsilon^-} + \frac{\varepsilon^2}{\mu_e} \widetilde{f}_\alpha, \\ \frac{1}{\mu_c} (\partial_3 \widetilde{W}_\alpha^c - \partial_\alpha \widetilde{W}_3^c) |_{x_3=0^-} &= \frac{1}{\mu_m} (\partial_3 \widetilde{W}_\alpha^m - \partial_\alpha \widetilde{W}_3^m) |_{x_3=0^+}, \\ \widetilde{W}_\alpha^e |_{x_3=\varepsilon^+} &= \widetilde{W}_\alpha^m |_{x_3=\varepsilon^-}, \quad \widetilde{W}_\alpha^c |_{x_3=0^-} = \widetilde{W}_\alpha^m |_{x_3=0^+}, \end{aligned}$$

where $\widetilde{f}_\alpha = f_\alpha - (\partial_3 p_\alpha - \partial_\alpha p_3) |_{x_3=\varepsilon^+}$. Moreover

$$q_e \widetilde{W}_3^e |_{x_3=\varepsilon^+} = q_m \widetilde{W}_3^m |_{x_3=\varepsilon^-}, \quad q_c \widetilde{W}_3^c |_{x_3=0^-} = q_m \widetilde{W}_3^m |_{x_3=0^+}.$$

Since the functions \widetilde{f}_α are defined on Γ , it is convenient to define \widetilde{F}_α on Γ_ε by

$$\forall \mathbf{x}_T \in \Gamma, \quad \widetilde{F}_\alpha \circ \Phi(\mathbf{x}_T, \varepsilon) = \widetilde{f}_\alpha(\mathbf{x}_T).$$

Denoting by $\widetilde{\mathbb{G}}$ and $\widetilde{\mathbb{F}}$ the following 1-forms defined by

$$\widetilde{\mathbb{G}} = \varepsilon 1_{\mathcal{O}_{\mathbf{e}}^{\varepsilon}} \mathbb{G} + \varepsilon^2 1_{\mathcal{O}_{\mathbf{e}}^{\varepsilon}} (\delta d\mathbb{P} - \mu_{\mathbf{e}} q_{\mathbf{e}} \mathbb{P}), \quad \widetilde{\mathbb{F}} = \widetilde{F}_{\alpha} dx^{\alpha},$$

there exists an ε -independent constant $C > 0$ such that

$$\|\widetilde{\mathbb{G}}\|_{L^2\Omega^1(\mathcal{O})} \leq C\varepsilon^{3/2}, \quad \|\delta\widetilde{\mathbb{G}}\|_{L^2(\mathcal{O})} \leq C\varepsilon^{3/2} \text{ and } \|\widetilde{\mathbb{F}}\|_{H^{-1/2}\Omega^1(\Gamma_{\varepsilon})} \leq C.$$

The 1-form $\widetilde{\mathbb{W}}$ satisfies the following equalities

$$\delta d\widetilde{\mathbb{W}} - \mu q \widetilde{\mathbb{W}} = \widetilde{\mathbb{G}}, \text{ in } \mathcal{O}_{\mathbf{e}}^{\varepsilon} \cup \mathcal{O}_{\mathbf{m}}^{\varepsilon} \cup \mathcal{O}_{\mathbf{c}}, \quad N_{\partial\mathcal{O}} \wedge \widetilde{\mathbb{W}}^{\mathbf{e}}|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad \text{on } \partial\mathcal{O}, \quad (9.52a)$$

with the following transmission conditions on Γ_{ε} and on Γ

$$\frac{1}{\mu_{\mathbf{e}}} \text{int}(N_{\Gamma_{\varepsilon}}) d\widetilde{\mathbb{W}}^{\mathbf{e}}|_{\Gamma_{\varepsilon}^{+}} = \frac{1}{\mu_{\mathbf{m}}} \text{int}(N_{\Gamma_{\varepsilon}}) d\widetilde{\mathbb{W}}^{\mathbf{m}}|_{\Gamma_{\varepsilon}^{-}} + \frac{\varepsilon^2}{\mu_{\mathbf{e}}} \widetilde{\mathbb{F}}, \quad (9.52b)$$

$$\frac{1}{\mu_{\mathbf{m}}} \text{int}(N_{\Gamma}) d\widetilde{\mathbb{W}}^{\mathbf{m}}|_{\Gamma^{+}} = \frac{1}{\mu_{\mathbf{c}}} \text{int}(N_{\Gamma}) d\widetilde{\mathbb{W}}^{\mathbf{c}}|_{\Gamma^{-}}, \quad (9.52c)$$

$$N_{\Gamma_{\varepsilon}} \wedge \widetilde{\mathbb{W}}^{\mathbf{e}}|_{\Gamma_{\varepsilon}^{+}} = N_{\Gamma_{\varepsilon}} \wedge \widetilde{\mathbb{W}}^{\mathbf{m}}|_{\Gamma_{\varepsilon}^{-}}, \text{ and } N_{\Gamma} \wedge \widetilde{\mathbb{W}}^{\mathbf{m}}|_{\Gamma^{+}} = N_{\Gamma} \wedge \widetilde{\mathbb{W}}^{\mathbf{c}}|_{\Gamma^{-}}. \quad (9.52d)$$

Moreover

$$\delta \widetilde{\mathbb{W}} = \frac{1}{\mu q} \delta \widetilde{\mathbb{G}}, \quad \text{in } \mathcal{O}_{\mathbf{e}}^{\varepsilon} \cup \mathcal{O}_{\mathbf{m}}^{\varepsilon} \cup \mathcal{O}_{\mathbf{c}}, \quad (9.53)$$

and $\widetilde{\mathbb{G}}$ and $\widetilde{\mathbb{F}}$ are such that

$$q_{\mathbf{e}} \text{int}(N_{\Gamma_{\varepsilon}}) \widetilde{\mathbb{W}}^{\mathbf{e}}|_{\Gamma_{\varepsilon}^{+}} = q_{\mathbf{m}} \text{int}(N_{\Gamma_{\varepsilon}}) \widetilde{\mathbb{W}}^{\mathbf{m}}|_{\Gamma_{\varepsilon}^{-}}, \quad q_{\mathbf{c}} \text{int}(N_{\Gamma}) \widetilde{\mathbb{W}}^{\mathbf{c}}|_{\Gamma^{-}} = q_{\mathbf{m}} \text{int}(N_{\Gamma}) \widetilde{\mathbb{W}}^{\mathbf{m}}|_{\Gamma^{+}}.$$

Multiply (9.52) by $\widetilde{\mathbb{W}}$ and integrate by parts with the help of (9.53) to infer

$$\|\widetilde{\mathbb{W}}^{\mathbf{e}}\|_{H\Omega^1(\mathbf{d}, \delta, \mathcal{O}_{\mathbf{e}}^{\varepsilon})} + \sqrt{\varepsilon} \|\widetilde{\mathbb{W}}^{\mathbf{m}}\|_{H\Omega^1(\mathbf{d}, \delta, \mathcal{O}_{\mathbf{m}}^{\varepsilon})} + \|\widetilde{\mathbb{W}}^{\mathbf{c}}\|_{H\Omega^1(\mathbf{d}, \delta, \mathcal{O}_{\mathbf{c}})} \leq C\varepsilon^2,$$

for an ε -independent constant C . Moreover $\widetilde{\mathbb{W}} = \mathbb{W} + \varepsilon^2 1_{\mathcal{O}_{\mathbf{e}}^{\varepsilon}} \mathbb{P}$ implies

$$\|\mathbb{W}^{\mathbf{e}}\|_{H\Omega^1(\mathbf{d}, \delta, \mathcal{O}_{\mathbf{e}}^{\varepsilon})} + \sqrt{\varepsilon} \|\mathbb{W}^{\mathbf{m}}\|_{H\Omega^1(\mathbf{d}, \delta, \mathcal{O}_{\mathbf{m}}^{\varepsilon})} + \|\mathbb{W}^{\mathbf{c}}\|_{H\Omega^1(\mathbf{d}, \delta, \mathcal{O}_{\mathbf{c}})} \leq C\varepsilon^{3/2}, \quad (9.54)$$

from which we infer Theorem 9.3.5. ■

Acknowledgements

We thank very warmly Monique Dauge for her well-considered advice and suggestions.

Annexe 9.7

Asymptotic expansion at any order

We may extend our derivation principle to obtain asymptotic transmission conditions at any order. Actually, there exists a recurrence formula, which is given in this appendix. The sketch of the proof of the expansion, which is similar to the proof of Theorem 9.6.1 is left to the reader. For $(\alpha, \beta, \iota, \kappa) \in \{1, 2\}^4$ define the following sequences $(A_{\alpha\beta\iota\kappa}^l)_{l \in \mathbb{N}}$, $(B_{\alpha\beta\iota\kappa}^l)_{l \in \mathbb{N}}$, $(C_{\alpha\beta\iota\kappa}^l)_{l \in \mathbb{N}}$ and $(D_{\alpha\beta\iota\kappa}^l)_{l \in \mathbb{N}}$ by

$$\begin{cases} A_{\alpha\beta\iota\kappa}^l = \frac{\partial_\eta^l}{\varepsilon^l} \left(\frac{g_{\alpha\iota}^m}{\sqrt{g^m}} \frac{\partial_\eta}{\varepsilon} \left(\frac{g_{\beta\kappa}^m}{\sqrt{g^m}} \right) \right) \Big|_{\eta=0}, \\ B_{\alpha\beta\iota\kappa}^l = \frac{\partial_\eta^l}{\varepsilon^l} \left(\frac{g_{\alpha\beta}^m}{\sqrt{g^m}} \partial_\kappa \left(\frac{1}{\sqrt{g^m}} \right) \right) \Big|_{\eta=0}, \\ C_{\alpha\beta}^l = \frac{\partial_\eta^l}{\varepsilon^l} \left(\frac{g_{\alpha\beta}}{g^m} \right) \Big|_{\eta=0}, \\ D^l = \frac{\partial_\eta^l}{\varepsilon^l} \left(\frac{1}{\sqrt{g^m}} \frac{\partial_\eta}{\varepsilon} (\sqrt{g^m}) \right) \Big|_{\eta=0}, \\ E_{\alpha\beta\iota\kappa}^l = \frac{\partial_\eta^l}{\varepsilon^l} \left(\frac{1}{\sqrt{g^m}} \partial_\alpha \left(\frac{g_{\beta\kappa}}{\sqrt{g^m}} \right) \right) \Big|_{\eta=0}. \end{cases}$$

Using (9.23)-(9.25), for $k \geq 1$ we define $\partial_\eta^2 \mathcal{E}_\lambda^{m,k+2}$ and $\partial_\eta \mathcal{E}_3^{m,k+1}$ respectively by

$$\begin{aligned} \partial_\eta^2 \mathcal{E}_\lambda^{m,k+2} &= \partial_\eta \partial_\lambda \mathcal{E}_3^{m,k+1} + \epsilon_{\alpha\beta 3} \epsilon_{\iota\kappa 3} A_{\lambda\alpha\iota\kappa}^0 \partial_\eta \mathcal{E}_\beta^{m,k+1} - \mu_m q_m \mathcal{E}_\lambda^{m,k} \\ &\quad + \epsilon_{\alpha\beta 3} \epsilon_{\iota\kappa 3} \sum_{l=1}^k \left\{ \left(B_{\lambda\iota\kappa}^l \partial_\alpha + C_{\lambda\iota}^l \partial_\kappa \partial_\alpha \right) \mathcal{E}_\beta^{m,k-l} \right. \\ &\quad \left. + A_{\lambda\alpha\iota\kappa}^l \left(\partial_\eta \mathcal{E}_\beta^{m,k+1-l} - \partial_\beta \mathcal{E}_3^{m,k-l} \right) \right\}, \\ \partial_\eta \mathcal{E}_3^{m,k+1} &= - \sum_{l=0}^k \left(D^l \mathcal{E}_3^{m,k-l} + \epsilon_{\alpha\beta 3} \epsilon_{\iota\kappa 3} \left(C_{\kappa\beta}^l \partial_\alpha + E_{\alpha\beta\iota\kappa}^l \right) \mathcal{E}_\iota^{m,k-l} \right) \end{aligned}$$

Define now the differential forms \mathbb{S}_{k+1} and \mathbb{T}_{k+1} by

$$\begin{aligned}\mathbb{S}_{k+1} &= \left\{ \frac{1}{\mu_m} \int_0^1 \left(\partial_\eta^2 \mathcal{E}_\lambda^{m,k+2} - \partial_\lambda \partial_\eta \mathcal{E}_3^{m,k+1} \right) d\eta \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\mu_e} \sum_{l=0}^k \partial_{x_3}^l \left(\partial_3 \tilde{\mathbf{E}}_\lambda^{e,k-l} - \partial_\lambda \tilde{\mathbf{E}}_3^{e,k-l} \right) \Big|_{x_3=0^+} \right\} dx^\lambda, \\ \mathbb{T}_{k+1} &= \left\{ \int_0^1 \partial_\eta \mathcal{E}_\lambda^{m,k+1} d\eta - \sum_{l=0}^k \partial_{x_3}^l \tilde{\mathbf{E}}_\lambda^{e,k-l} \right\} dx^\lambda.\end{aligned}$$

The 1-forms $\tilde{\mathbf{E}}^{e,k+1}$ and $\mathbf{E}^{c,k+1}$ are therefore defined by

$$\begin{aligned}\delta d \tilde{\mathbf{E}}^{e,k+1} - \mu_e q_e \tilde{\mathbf{E}}^{e,k+1} &= 0, \text{ in } \mathcal{O}_e, \\ \delta d \mathbf{E}^{c,k+1} - \mu_c q_c \mathbf{E}^{c,k+1} &= 0, \text{ in } \mathcal{O}_c, \\ N_{\partial \mathcal{O}} \wedge \tilde{\mathbf{E}}^{e,k+1} \Big|_{\partial \mathcal{O}} &= 0,\end{aligned}$$

with the following transmission conditions on Γ

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu_e} \text{int}(N_\Gamma) d \tilde{\mathbf{E}}^{e,k+1} \Big|_{\Gamma^+} - \frac{1}{\mu_c} \text{int}(N_\Gamma) d \mathbf{E}^{c,k+1} \Big|_{\Gamma^-} &= \mathbb{S}_{k+1}, \\ N_\Gamma \wedge \tilde{\mathbf{E}}^{e,k+1} \Big|_{\Gamma^+} - N_\Gamma \times \mathbf{E}^{c,k+1} \Big|_{\Gamma^-} &= N_\Gamma \times \mathbb{T}_{k+1}.\end{aligned}$$

Since for $n = 0, 1$ the 1-forms $(\mathcal{E}^{m,n}, \mathbf{E}^{c,n}, \tilde{\mathbf{E}}^{e,n})_{n=0,1}$ are determined by (9.10)–(9.48)–(9.46)–(9.49), and since $\partial_\eta \mathcal{E}_\lambda^{m,2}$ is also known according to Remark 9.5.2, the recurrence process is initialized. The reader could prove that outside a neighborhood of $\mathcal{O}_m^\varepsilon$ the following estimate holds $\mathbf{E} = \sum_{k=0}^n \varepsilon^k \mathbf{E}^k + O(\varepsilon^n)$.

Annexe 9.8

Few notions of differential calculus

Basic notions on differential forms

In order to obtain a self-contained paper, we present here few notions of differential calculus. We refer the reader to the books of Schwarz [59], of Dubrovine *et al.* [22, 23] and of Flanders [29] for more precisions. In this paragraph, n is a positive integer and k is a non negative integer smaller than n .

Let (M, g) be a compact connected oriented Riemannian manifold of \mathbb{R}^n with smooth compact boundary ∂M . For $p \in M$, $T_p M$ denotes the tangent space to M at the point

p . The tangent bundle TM is the disjoint union of the spaces $T_p M$, $p \in M$. We denote by $\Gamma(TM)$ the space of the smooth sections⁹ of TM . We recall that the metric \mathbf{g} on the manifold M is a smooth map $\mathbf{g} : TM \times TM \rightarrow \mathbb{R}$ such that for any $p \in M$, $\mathbf{g}|_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ is bilinear, symmetric and positive definite.

Denote by $\Lambda^k(T_p M)$ the space of anti-symmetric k -linear maps and by $\Lambda^k(M)$ the exterior k -form bundle defined by $\Lambda^k(M) = \cup_{p \in M} \Lambda^k(T_p M)$. The space $\Omega^k(M)$ of k -forms is the space of all smooth sections of $\Lambda^k(M)$. We denote by $S(k, n)$ the set of the permutations σ (called (k, n) -shuffles) of the set $\{1, 2, \dots, n\}$ satisfying $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$, $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(n)$, and by $\text{sgn}(\sigma)$ the signature of the permutation $\sigma \in S(k, n)$. The following definitions and propositions come from Schwarz [59] and Flanders [29].

Definition-Proposition 9.8.1 (Elementary operations) *Define the exterior, inner and interior products.*

- *The exterior product \wedge of differential forms is defined by*

$$\wedge : \Omega^k(M) \times \Omega^l(M) \longrightarrow \Omega^{k+l}(M), \quad (\omega, \eta) \longmapsto \omega \wedge \eta,$$

where for arbitrary vector field $X = (X_1, \dots, X_{k+l})$ on M , we have

$$\omega \wedge \eta(X) = \sum_{\sigma \in S(k, k+l)} \text{sgn}(\sigma) \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}).$$

- *Let $(E_j)_{j=1}^n$ be a local \mathbf{g} -orthonormal¹⁰ frame on $U \subset M$. The inner product on $\Omega^k(M)$ is locally defined from $\Omega^k(M) \times \Omega^k(M)$ to $C^\infty(M)$ by*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega^k} : (\omega, \eta) \mapsto \langle \omega, \eta \rangle_{\Omega^k} = \sum_{\sigma \in S(k, n)} \omega(E_{\sigma(1)}, \dots, E_{\sigma(k)}) \eta(E_{\sigma(1)}, \dots, E_{\sigma(k)}).$$

- *The Hodge star operator is defined by*

$$\star : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{n-k}(M), \quad \omega \mapsto \star \omega,$$

where $\star \omega$ is the unique $(n - k)$ -form satisfying

$$\forall \eta \in \Omega^k, \quad \eta \wedge \star \omega = \langle \eta, \omega \rangle_{\Omega^k} \text{dvol}_M.$$

The notation dvol_M denotes the Riemannian volume n -form

$$\text{dvol}_M(X_1, \dots, X_n) = \sqrt{\det(\mathbf{g}(X_i, X_j))}.$$

⁹ There exists a smooth projection map π from the manifold TM unto M . A section of TM is a smooth map $s : M \rightarrow TM$ such that $\pi \circ s = \text{Id}_M$.

¹⁰ For $U \subset M$, the tuple $(E_j)_{j=1}^n \in \Gamma(TU)^n$ is a local \mathbf{g} -orthonormal frame on M if for any $p \in U$, $\mathbf{g}(E_i, E_j)|_p = \delta_i^j$, where δ_i^j is the well-known Kronecker symbol equal to 1 if $i = j$ and 0 if $i \neq j$.

- The interior product $\text{int}(Y)$ with a smooth vector field Y of $\Gamma(TM)$ is defined by

$$\text{int}(Y) : \Omega^k(M) \longrightarrow \Omega^{k-1}(M), \quad \omega \mapsto \text{int}(Y)\omega,$$

where

$$(\text{int}(Y)\omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(Y, X_1, \dots, X_{k-1}), \quad \forall (X_1, \dots, X_{k-1}) \in \Gamma(TM)^{k-1}.$$

Remark 9.8.2 [Identifications of spaces] The space $C^\infty(M)$ of smooth functions on M and $\Omega^0(M)$ coincide. Moreover by definition, $\Omega^1(M)$ is the cotangent bundle¹¹ T^*M . Therefore we may identify the space of vector fields $\Gamma(TM)$ with $\Omega^1(M)$. \triangle

Remark 9.8.3 [Duality of the interior and exterior products] Denote by Y a vector field and identify Y with its corresponding 1-form. The interior product $\text{int}(Y)$ is the dual map of the left exterior multiplication $Y \wedge$

$$\forall \omega \in \Omega^{k+1}(M), \quad \forall \eta \in \Omega^k \quad \langle \text{int}(Y)\omega, \eta \rangle_{\Omega^k(M)} = \langle \omega, Y \wedge \eta \rangle_{\Omega^{k+1}(M)}. \quad (9.55)$$

\triangle

Definition-Proposition 9.8.4 (Differential operators) We define the exterior differential, the codifferential and the Laplace-Beltrami operators.

- Let $(dy^j)_{j=1}^n$ be a basis of $\Omega^1(M)$. There exists an unique differential operator $d : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$, called exterior differential, such that

$$\begin{aligned} \forall (\omega, \eta) \in \Omega^k(M) \times \Omega^k(M), \quad d(\omega + \eta) &= d\omega + d\eta, \\ \forall (\omega, \eta) \in \Omega^k(M) \times \Omega^l(M), \quad d(\omega \wedge \eta) &= d\omega \wedge \eta + (-1)^l \omega \wedge d\eta, \\ \forall \omega \in \Omega^k(M), \quad d(d\omega) &= 0, \\ \forall f \in C^\infty(M), \quad df : (y^1, \dots, y^n) \in M &\rightarrow \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial y^j}(y^1, \dots, y^n) dy^j. \end{aligned}$$

- The codifferential is the map $\delta : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ defined by

$$\forall \omega \in \Omega^k(M), \quad \delta\omega = (-1)^{nk+n+1} \star d(\star\omega), \quad \text{if } k \neq 0 \text{ and } \delta \sim 0 \text{ on functions.}$$

- The Laplace-Beltrami operator¹² $\Delta : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M)$ is defined by

$$\forall \omega \in \Omega^k(M), \quad \Delta\omega = -(d\delta\omega + \delta d\omega).$$

¹¹The cotangent bundle T^*M is the disjoint union for $x \in M$ of linear forms on $T_x M$.

¹²In order to identify Δ with the operator $\nabla \cdot (\nabla \cdot)$ we choose here to define the Laplace-Beltrami operator as the opposite of the geometric Laplacian.

Appendix 2 is devoted to the explicit formulae of differential calculus in \mathbb{R}^3 equipped with the Euclidean metric in any system of coordinates. This formulae will be useful in the derivation of our asymptotic result.

Notation 9.8.5 *To simplify notations, and when it is evident, we omit the \wedge symbol between 2 differential forms. For example, we denote by $dy^i dy^j = dy^i \wedge dy^j$. Observe that obviously $dy^i dy^j = -dy^j dy^i$.*

Define now the Sobolev spaces needed in the paper.

Definition 9.8.6 (Sobolev spaces) *Let $(U_a)_{a \in A}$ be an open cover of M , let $(\chi_a)_{a \in A}$ be a subordinated partition of the unity and let (E_1^a, \dots, E_n^a) be a family of local frames. Denote by ∇ the induced Levi-Civita connection on M , and let $\Omega_c^k(M)$ be the space of the compactly supported k -forms on M . This space is equipped with the following L^2 -inner product*

$$\langle\langle \omega, \eta \rangle\rangle = \int_M \langle \omega, \eta \rangle_{\Omega^k} d\text{vol}_M.$$

For $s \in \mathbb{N}$, define the $H^s \Omega^k(M)$ -norm as follows

$$\|\omega\|_{H^s \Omega^k(M)}^2 = \sum_{a \in A} \int_M \chi_a |\omega|_{J^s(\Lambda)}^2 d\text{vol}_M,$$

where

$$|\omega|_{J^0(\Lambda)}^2 = \langle \omega, \omega \rangle_{\Omega^k}, \quad |\omega|_{J^s(\Lambda)}^2 = |\omega|_{J^{s-1}(\Lambda)}^2 + \sum_{j=1}^n |\nabla_{E_j^a} \omega|_{J^{s-1}(\Lambda)}^2.$$

The Sobolev space $H^s \Omega^k(M)$ is defined as the completion of $\Omega_c^k(M)$ for the above $H^s \Omega^k(M)$ -norm.

The Sobolev spaces $H^s \Omega^k(M)$, for $s \in \mathbb{R}$, are defined similarly to the Sobolev spaces of functions : see Lions and Magenes [40].

Proposition 9.6 (Traces on ∂M for $H\Omega^k(d, M)$ and $H\Omega^k(\delta, M)$) *Denote by \mathcal{J} the natural embedding $\partial M \rightarrow M$ and \mathcal{J}^* its pull-back $\mathcal{J}^* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(\partial M)$. Denote by $N_{\partial M}$ the outward normal¹³ to ∂M . The following traces hold [59, 36, 52]*

$$\text{for all } \omega \in H\Omega^k(d, M), \quad \mathcal{J}^*(\omega) \in H^{-1/2} \Omega^k(\partial M), \quad (9.56)$$

$$\text{for all } \omega \in H\Omega^k(\delta, M), \quad \text{int}(N_{\partial M})\omega \in H^{-1/2} \Omega^k(\partial M), \quad (9.57)$$

$$\text{for all } s \geq 0, \text{ for all } \omega \in H^s \Omega^k(M), \quad \omega|_{\partial M} \in H^{s-1/2} \Omega^k(M)|_{\partial M}. \quad (9.58)$$

¹³Denote by $\Gamma(TM|_{\partial M})$ the space of vector fields on M sitting over the boundary ∂M . A field $N \in \Gamma(TM|_{\partial M})$ is a unit normal field on M is $\mathfrak{g}(N, N) = 1$ and for any $Y \in \Gamma(T\partial M)$, $\mathfrak{g}(Y, N) = 0$. Therefore observe that $dN = 0$.

Moreover the usual Sobolev embeddings hold true for the k -forms. The following Green formula is useful (see [59, 36, 52]).

Proposition 9.7 (Green formula) *Denote by N the outward normal to ∂M . Let $(\omega, \eta) \in H\Omega^{k-1}(\mathrm{d}, M) \times H\Omega^k(\delta, M)$, such that either $\mathcal{J}^*\omega$ or $\mathrm{int}(N)\eta$ belongs to $H^{1/2}\Omega^{k-1}(\partial M)$. The following equality holds*

$$\begin{aligned} \int_M \langle \mathrm{d}\omega, \eta \rangle_{\Omega^k} \mathrm{dvol}_M &= \int_M \langle \omega, \delta\eta \rangle_{\Omega^{k-1}} \mathrm{dvol}_M \\ &\quad - \int_{\partial M} \langle \omega, \mathrm{int}(N)\eta \rangle_{\Omega^{k-1}} \mathrm{d}\sigma_{\partial M}. \end{aligned}$$

We denote by $\mathrm{d}\sigma_{\partial M}$ the surface form of ∂M , in order to differentiate the volume form of M and the surface form of ∂M .

Property 9.8.7 (Useful equality) *Suppose now that M is a compact connected oriented Riemannian manifold without boundary. Let ω is a k -form and Y is a smooth 1-form such that $\mathrm{d}Y = 0$. Then applying the above Green formula with the help of equality (9.55) we infer that for $\omega \in H\Omega^k(\delta, M)$*

$$\mathrm{int}(Y)\delta\omega = (-1)^k \delta(\mathrm{int}(Y)\omega). \quad (9.59)$$

PREUVE. Actually, for any $\eta \in H\Omega^{k-2}(\mathrm{d}, M)$, we have

$$\begin{aligned} \int_M \langle \mathrm{int}(Y)\delta\omega, \eta \rangle_{\Omega^{k-2}} \mathrm{dvol}_M &= \int_M \langle \delta\omega, Y \wedge \eta \rangle_{\Omega^{k-1}} \mathrm{dvol}_M \\ &= \int_M \langle \omega, \mathrm{d}(Y \wedge \eta) \rangle_{\Omega^k} \mathrm{dvol}_M, \\ &= (-1)^{k-2} \int_M \langle \omega, Y \wedge \mathrm{d}\eta \rangle_{\Omega^k} \mathrm{dvol}_M \\ &= (-1)^{k-2} \int_M \langle \mathrm{int}(Y)\omega, \mathrm{d}\eta \rangle_{\Omega^{k-1}} \mathrm{dvol}_M \\ &= (-1)^{k-2} \int_M \langle \delta(\mathrm{int}(Y)\omega), \eta \rangle_{\Omega^{k-2}} \mathrm{dvol}_M. \end{aligned}$$

■

Explicit formulae

The definitions and propositions of the previous paragraph recall the basic notions of differential calculus for a general compact connected oriented Riemannian manifold (M, \mathbf{g}) of \mathbb{R}^n with smooth compact boundary ∂M . Present now the explicit formulae of

the differential calculus for a manifold $M \subset \mathbb{R}^3$ equipped with the Euclidean metric. Denote by (x, y, z) the usual Euclidean coordinates of M and let (y_1, y_2, y_3) another system of coordinates : there exists a C^∞ -diffeomorphism ψ such that $\psi(y_1, y_2, y_3) = (x, y, z)$. The Euclidean metric in (y_1, y_2, y_3) -coordinates is given by the matrix $(g_{ij})_{i,j=1,2,3}$: $g_{ij} = \partial_{y_i} \psi \cdot \partial_{y_j} \psi$, where \cdot denotes the Euclidean scalar product of \mathbb{R}^3 . The inverse matrix of $(g_{ij})_{ij}$ is denoted by $(g^{ij})_{ij}$ and set

$$g = \det \left((g_{ij})_{i,j=1,2,3} \right).$$

Denote by (dy^1, dy^2, dy^3) the basis of $\Omega^1(M)$ associated to (y_1, y_2, y_3) . It is clear that 2-forms $(dy^2 \wedge dy^3, dy^3 \wedge dy^1, dy^1 \wedge dy^2)$ is a basis of $\Omega^2(M)$. Since M is equipped with the Euclidean metric, we perform the change of coordinates $\psi(y_1, y_2, y_3) = (x, y, z)$ to infer that the inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega^k}$ for $k = 0, 1, 2$, is determined in (y_1, y_2, y_3) -coordinates by¹⁴ the following equalities

$$\langle F, G \rangle_{\Omega^0} = FG, \quad (9.60a)$$

$$\langle dy^i, dy^j \rangle_{\Omega^1} = g^{ij}, \quad (9.60b)$$

$$\langle dy^i dy^k, dy^j dy^l \rangle_{\Omega^2} = g^{ij} g^{kl} - g^{il} g^{jk}, \quad (9.60c)$$

$$\langle F dy^1 dy^2 dy^3, G dy^1 dy^2 dy^3 \rangle_{\Omega^3} = \frac{1}{g} FG, \quad (9.60d)$$

where F and G are smooth functions on M , and g is the determinant of (g_{ij}) .

• **Exterior products on \mathbb{R}^3 .** The exterior product between a k -form and a l -form equals zero as soon as $k + l > 3$. Moreover, for $k \in \{0, \dots, 3\}$, the exterior product between a 0-form and a k -form is the usual scalar multiplication between a function and a k -form. Accordingly Definition-Proposition 9.8.1, the following formulae hold.

▷ Exterior product of 1-forms. Let $\lambda = \lambda_i dy^i$ and $\mu = \mu_i dy^i$ be two 1-forms, then

$$\lambda \wedge \mu = \lambda_i \mu_j dy^i dy^j = \frac{\epsilon_{ijk}}{2} (\epsilon_{klm} \lambda_l \mu_m) dy^i dy^j.$$

▷ Exterior product between a 2-form and a 1-form. Let $\lambda = \frac{\epsilon_{ijk}}{2} \lambda_k dy^i dy^j$ and $\mu = \mu_i dy^i$, then

$$\lambda \wedge \mu = \lambda_k \mu_k dy^1 dy^2 dy^3.$$

• **Expression of d .** A straightforward application of the recurrence formula given in Definition-Proposition 9.8.4 implies the following formulae.

▷ d on 0-forms. Let λ be a 0-form, i.e. λ is a function. Then

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial y^i} dy^i.$$

¹⁴To simplify notations, we omit the sign \wedge between the differential forms dy^i and dy^j , for $i, j = 1, 2, 3$.

▷ *d on 1-forms.* Let $\mu = \mu_i dy^i$, then $d\mu$ equals

$$d\mu = \frac{\partial \mu_j}{\partial y_i} dy^i dy^j = \frac{\epsilon_{ijk}}{2} \left(\epsilon_{klm} \frac{\partial \mu_m}{\partial y_l} \right) dy^i dy^j.$$

▷ *d on 2-forms.* Let $\lambda = \frac{\epsilon_{ijk}}{2} \lambda_k dy^i dy^j$ be a 2-form, then we have

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda_k}{\partial y_k} dy^1 dy^2 dy^3.$$

Proposition 9.8 (Star Hodge operator) *Star Hodge operator is defined by Definition-Proposition 9.8.1.*

• **Hodge on functions and 3-forms.** *Let S be a 0-form and $T = \tau dy^1 dy^2 dy^3$ be a 3-form. Then*

$$\star S = \sqrt{g} S dy^1 dy^2 dy^3, \quad \star T = \frac{1}{\sqrt{g}} \tau.$$

• **Hodge on 1-forms.** *Let $R = R_i dy^i$ be a 1-form. Then $\star R$ is the 2-form defined by*

$$\star R = \frac{\epsilon_{ijk}}{2} \sqrt{g} g^{kl} R_l dy^i dy^j.$$

• **Hodge on 2-forms.** *Let $S = \frac{\epsilon_{ijk}}{2} S_k dy^i dy^j$ be a 2-form. Then $\star S$ is the 1-form equal to*

$$\star S = \frac{1}{\sqrt{g}} g_{ik} S_k dy^i.$$

PREUVE. According to Definition-Proposition 9.8.1, if ω is a k -form, then $\star \omega$ is the $3 - k$ form such that

$$\forall \eta \in \Omega^k(M), \quad \eta \wedge \star \omega = \langle \eta, \omega \rangle_{\Omega^k(M)} \sqrt{g} dy^1 dy^2 dy^3.$$

Applying the above formulae of the exterior products, and equalities (9.60), we infer the proposition. ■

Proposition 9.9 (The codifferential operator δ) *The codifferential is defined by Definition-Proposition 9.8.4.*

• **Codifferential of 1-forms.** *Let $\mu = \mu_i dy^i$, then*

$$\delta \mu = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y_k} (\sqrt{g} g^{kl} \mu_l). \quad (9.61)$$

- **Codifferential of 2-forms.** Let $\lambda = \frac{\epsilon_{ijk}}{2} \lambda_k dy^i dy^j$, then

$$\delta\lambda = \epsilon_{jkl} \frac{g_{ij}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\frac{g_{lm}}{\sqrt{g}} \lambda_m \right) dy^i.$$

PREUVE. Since the codifferential on k -forms in \mathbb{R}^3 is defined by $\delta = (-1)^{3k} \star d\star$, a straightforward application of the formulae of the differential operator d and the use of Proposition 9.8 lead to the formulae of the codifferential operator. ■

Proposition 9.9 with the formulae of d differential operator implies the following corollary.

Corollary 9.8.8 (δd and Δ operators on functions and on 1-forms) Recall that $\Delta = -(\delta d + d\delta)$.

- Let f be a function. Then

$$\Delta f = -\delta df = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\sqrt{g} g^{kl} \frac{\partial}{\partial y_l} f \right). \quad (9.62)$$

- Let $\lambda = \lambda_i dy^i$ be a 1-form, then

$$\delta d\lambda = \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} \frac{g_{ri}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{g_{kl}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y_m} \lambda_n \right) dy^r, \quad (9.63)$$

$$\Delta\lambda = - \left(\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} \frac{g_{ri}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{g_{kl}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y_m} \lambda_n \right) - \frac{\partial}{\partial y_r} \left(\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial y_k} (\sqrt{g} g^{kl} \lambda_l) \right) \right) dy^r. \quad (9.64)$$

Using equality (9.55), we infer the following proposition.

Proposition 9.10 (Interior product) Let N be a vector-field identified with the corresponding 1-form $N = N_i dy^i$.

- **Interior product of a vector-field on a 1-form.** Let $\mu = \mu_i dy^i$. Then

$$\text{int}(N)\mu = g^{ij} N_j \mu_i. \quad (9.65)$$

- **Interior product of a vector-field on a 2-form.** Let $\mu = \mu_{ij} dy^i dy^j$, then

$$\text{int}(N)\mu = g_{rl} \mu_{ij} N_k (g^{ik} g^{jl} - g^{il} g^{jk}) dy^r. \quad (9.66)$$

Conclusion et perspectives

On a mis en évidence l'*effet de peau* par une analyse asymptotique ainsi que par des simulations numériques. On a réussi à expliciter la structure du champ électromagnétique relativement au petit paramètre δ dans le cadre d'une interface générale régulière. Ce travail a nécessité la mise au point d'une méthode de calcul tensoriel. D'autre part, on a validé les développements asymptotiques en démontrant des estimations uniformes des restes.

Ces estimations uniformes sont valables dans un cadre plus général où les sous-domaines sont polyédraux à bords lipschitziens. De fait, notre méthode est adaptée pour traiter le problème de transmission avec une interface singulière. En particulier, on considère le problème posé dans des sous-domaines axisymétriques avec une interface polyédrale ayant des arêtes circulaires. Le problème de transmission scalaire correspondant est posé dans le domaine méridien dont l'interface est polygonale. A partir de l'article [44], on devrait pouvoir décrire les termes de couches coins aux sommets de cette interface polygonale apparaissant dans le développement asymptotique.

Enfin, on a réalisé des simulations numériques dans un cadre axisymétrique. On a ainsi pu effectuer des calculs avec une grande précision qui mettent en évidence d'une part la décroissance exponentielle du champ électromagnétique près de l'interface dans le conducteur et d'autre part l'influence de la géométrie de l'interface sur le phénomène de l'*effet de peau*.

Bibliographie

- [1] S. Agmon. *Lectures on elliptic boundary value problems*. Prepared for publication by B. Frank Jones, Jr. with the assistance of George W. Batten, Jr. Van Nostrand Mathematical Studies, No. 2. D. Van Nostrand Co., Inc., Princeton, N.J.-Toronto-London, 1965.
- [2] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. I. *Comm. Pure Appl. Math.*, 12 :623–727, 1959.
- [3] S. Agmon, A. Douglis, and L. Nirenberg. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions. II. *Comm. Pure Appl. Math.*, 17 :35–92, 1964.
- [4] C. Amrouche, C. Bernardi, M. Dauge, and V. Girault. Vector potentials in three-dimensional non-smooth domains. *Math. Methods Appl. Sci.*, 21(9) :823–864, 1998.
- [5] G. B. Arfken and H. J. Weber. *Mathematical methods for physicists*. Academic Press Inc., San Diego, CA, fourth edition, 1995.
- [6] V. M. Babich. The skin effect in the case of a wire with arbitrary cross section. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 128 :13–20, 1983. Mathematical questions in the theory of wave propagation, 13.
- [7] C. Balanis. *Advanced Engineering Electromagnetics*. John Wiley and Sons Ltd, 1989.
- [8] A. Bendali and K. Lemrabet. Asymptotic analysis of the scattering of a time-harmonic electromagnetic wave by a perfectly conducting metal coated with a thin dielectric shell. *Asymptot. Anal.*, 57(3-4) :199–227, 2008.
- [9] C. Bernardi, M. Dauge, and Y. Maday. *Spectral methods for axisymmetric domains*, volume 3 of *Series in Applied Mathematics (Paris)*. Gauthier-Villars, Éditions Scientifiques et Médicales Elsevier, Paris, 1999. Numerical algorithms and tests due to Mejdi Azaïez.
- [10] P. Boissoles. *Problèmes mathématiques et numériques issus de l'imagerie par résonance magnétique nucléaire*. PhD thesis, Université Rennes 1, 2005.

- [11] A. Bossavit. *Électromagnétisme, en vue de la modélisation*, volume 14 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*. Springer-Verlag, Paris, 1993.
- [12] S. Ciuperca, M. Jai, and C. Poignard. Approximate transmission conditions through a rough thin layer. The case of the periodic roughness. Submitted.
- [13] M. Costabel and M. Dauge. Singularities of electromagnetic fields in polyhedral domains. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 151(3) :221–276, 2000.
- [14] M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise. Singularities of Maxwell interface problems. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 33(3) :627–649, 1999.
- [15] M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise. Singularities of eddy currents problems. Preprint of the Newton Institute, 2003.
- [16] M. Costabel, M. Dauge, and S. Nicaise. Corner singularities of Maxwell interface and eddy current problems. In *Operator theoretical methods and applications to mathematical physics*, volume 147 of *Oper. Theory Adv. Appl.*, pages 241–256. Birkhäuser, Basel, 2004.
- [17] M. Dauge. Problèmes mixtes pour le laplacien dans des domaines polyédraux courbes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 309(8) :553–558, 1989.
- [18] M. Dauge. Neumann and mixed problems on curvilinear polyhedra. *Integral Equations Operator Theory*, 15(2) :227–261, 1992.
- [19] M. Dauge, I. Djurdjevič, E. Faou, and A. Rössle. Eigenmode asymptotics in thin elastic plates. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 78(9) :925–964, 1999.
- [20] M. Denis-Papin and A. Kaufmann. *Cours de calcul tensoriel appliqué*. Éditions Albin Michel, Paris, 1966. Géométrie différentielle absolue, Avec des préfaces de F. Esclangon et Gabriel Kron, Troisième édition revue et corrigée, Progrès des Sciences et Techniques, Cours de Mathématiques Supérieures Appliquées (Mathématiques Modernes), No. 3.
- [21] M.P. do Carmo. *Differential geometry of curves and surfaces*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1976. Translated from the Portuguese.
- [22] B. Doubrovine, S. Novikov, and A. Fomenko. *Géométrie contemporaine. Méthodes et applications. I*. “Mir”, Moscow, 1982. Géométrie des surfaces, des groupes de transformations et des champs. [Geometry of surfaces, groups of transformations and fields], Translated from the Russian by Vladimir Kotliar.
- [23] B.A. Dubrovin, A.T. Fomenko, and S.P. Novikov. *Modern geometry—methods and applications. Part I*, volume 93 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1992. The geometry of surfaces, transformation groups, and fields, Translated from the Russian by Robert G. Burns.
- [24] B. Engquist and J.C. Nédélec. Effective boundary condition for acoustic and electromagnetic scattering thin layer. *Technical Report of CMAP*, 278, 1993.

- [25] E. Faou. *Développements asymptotiques dans les coques minces linéairement élastiques*. PhD thesis, Université Rennes 1, 2000.
- [26] E. Faou. Elasticity on a thin shell : formal series solution. *Asymptot. Anal.*, 31(3-4) :317–361, 2002.
- [27] E. Faou. Multiscale expansions for linear clamped elliptic shells. *Comm. Partial Differential Equations*, 29(11-12) :1799–1845, 2004.
- [28] E.C. Fear and M.A. Stuchly. Modelling assemblies of biological cells exposed to electric fields. *IEEE Trans Biomed Eng*, 45(10) :1259–1271, Oct 1998.
- [29] H. Flanders. *Differential forms with applications to the physical sciences*. Academic Press, New York, 1963.
- [30] K.R. Foster and H.P. Schwan. Dielectric properties of tissues and biological materials : a critical review. *CRC in Biomedical Engineering*, 17(1) :25–104, 1989.
- [31] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, volume 5 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. Theory and algorithms.
- [32] H. Goldstein. *Classical mechanics*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass., second edition, 1980. Addison-Wesley Series in Physics.
- [33] H. Haddar, P. Joly, and H.M. Nguyen. Generalized impedance boundary conditions for scattering problems from strongly absorbing obstacles : the case of Maxwell’s equations. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 18(10) :1787–1827, 2008.
- [34] H. Haddar, P. Joly, and H.M. Nguyen. Construction and analysis of approximate models for electromagnetic scattering from imperfectly conducting scatterers. *INRIA*, (2007), RR-6302.
- [35] Y.V. Kurylev, M. Lassas, and E. Somersalo. Reconstruction of a manifold from electromagnetic boundary measurements. In *Inverse problems : theory and applications (Cortona/Pisa, 2002)*, volume 333 of *Contemp. Math.*, pages 147–161. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [36] Y.V. Kurylev, M. Lassas, and E. Somersalo. Maxwell’s equations with a polarization independent wave velocity : direct and inverse problems. *J. Math. Pures Appl.* (9), 86(3) :237–270, 2006.
- [37] Y. Lafranche and D. Martin. `Fig4TeX`, macros `tex` pour le graphisme de précision.
[http ://perso.univ-rennes1.fr/yvon.lafranche/fig4tex](http://perso.univ-rennes1.fr/yvon.lafranche/fig4tex)
(2007).
- [38] T. Levi-Civita. *The absolute differential calculus*. Dover Phoenix Editions. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2005. Calculus of tensors, Translated from the Italian by Marjorie Long, Edited by Enrico Persico, Reprint of the 1926 translation.

- [39] Y. Y. Li and M. S. Vogelius. Gradient estimates for solutions to divergence form elliptic equations with discontinuous coefficients. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 153(2) :91–151, 2000.
- [40] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. I.* Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris, 1968.
- [41] D. Lovelock and H. Rund. *Tensor, differential forms, and variational principles.* Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York, 1975. Pure and Applied Mathematics.
- [42] R. C. MacCamy and E. Stephan. Solution procedures for three-dimensional eddy current problems. *J. Math. Anal. Appl.*, 101(2) :348–379, 1984.
- [43] R. C. MacCamy and E. Stephan. A skin effect approximation for eddy current problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 90(1) :87–98, 1985.
- [44] A. Maghnouji and S. Nicaise. Boundary layers for transmission problems with singularities. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 14, 16 pp. (electronic), 2006.
- [45] D. Martin. Méline, bibliothèque de calculs éléments finis.
[http : //perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin](http://perso.univ-rennes1.fr/daniel.martin) (2008).
- [46] D. Miklavčič, D. Šermov, H. Mekid, and L.M. Mir. A validated model of in vivo electric field distribution in tissues for electrochemotherapy and for DNA electro-transfer for gene therapy. *Biochimica et Biophysica Acta*, 1523 :73–83, 2000.
- [47] L.M. Mir. Electroporation of cells in tissues. Methods for detecting cell electropor-meabilisation *in vivo*. In *Electroporation based Technologies and Treatment : proceedings of the international scientific workshop and postgraduate course*, pages 32–35, 14-20 November 2005. Ljubljana, SLOVENIA.
- [48] C. W. Misner, K. S. Thorne, and J. A. Wheeler. *Gravitation.* W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1973.
- [49] Y. I. Mokin. Mathematical models of the skin effect under conditions of strong skinning. *Zh. Vychisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 24(9) :1417–1423, 1984.
- [50] P. Monk. *Finite element methods for Maxwell's equations.* Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York, 2003.
- [51] S. Muñoz, J.L. Sebastián, M. Sancho, and J.M. Miranda. Transmembrane voltage induced on altered erythrocyte shapes exposed to RF fields. *Bioelectromagnetics*, 25(1) :631–633 (electronic), 2004.
- [52] L. Paquet. Problèmes mixtes pour le système de Maxwell. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (5), 4(2) :103–141, 1982.
- [53] V. Péron. *Description de l'effet de peau par un développement asymptotique.* PhD thesis, Université Rennes 1, 2009. In preparation.

- [54] C. Poignard. Rigorous asymptotics for the electric field in tm mode at mid-frequency in a bidimensional medium with a thin layer. Preprint. 27p., sept 2006.
- [55] C. Poignard. Asymptotics for steady state voltage potentials in a bidimensional highly contrasted medium with thin layer. *Math. Meth. Appl. Sci.*, July 2007. DOI : 10.1002/mma.923.
- [56] C. Poignard. Approximate transmission conditions through a weakly oscillating thin layer. *Math. Meth. App. Sci.*, sept 2008. To appear.
- [57] C. Poignard, P. Dular, R. Perrussel, L. Krähenbühl, L. Nicolas, and M. Schatzman. Approximate condition replacing thin layer. *IEEE Trans. on Mag.*, 44(6) :1154–1157, 2008.
- [58] G. Pucihar, T. Kotnik, B. Valič, and D. Miklavčič. Numerical determination of transmembrane voltage induced on irregularly shaped cells. *Ann Biomed Eng*, 34(4) :642–652, Apr 2006.
- [59] G. Schwarz. *Hodge Decomposition- A method for solving boundary value problems*. Springer. Lecture notes, Berlin, 1995.
- [60] J.L. Sebastián, S. Muñoz, M. Sancho, and J.M. Miranda. Analysis of the influence of the cell geometry and cell proximity effects on the electric field distribution from direct rf exposure. *Phys. Med. Biol.*, 46 :213–225 (electronic), 2001.
- [61] H. Z. Shu. Approximation of a bidimensional problem with skin effect. *Math. Comput. Simulation*, 53(3) :149–170, 2000.
- [62] E. Stephan. Solution procedures for interface problems in acoustics and electromagnetics. In *Theoretical acoustics and numerical techniques*, volume 277 of *CISM Courses and Lectures*, pages 291–348. Springer, Vienna, 1983.
- [63] T.Y. Tsong. Electroporation of cell membranes. *Biophys J.*, 60 :297–306, 1991.
- [64] G. Vial. *Analyse multi-échelle et conditions aux limites approchées pour un problème avec couche mince dans un domaine à coin*. PhD thesis, Université Rennes1, Juin 2003. Thesis.
- [65] D. Šel, D. Cukjati, D. Batiuskaite, T. Slivnik, L.M. Mir, and D. Miklavčič. Sequential finite element model of tissue electroporabilization. *IEEE Trans. Bio. Eng.*, 52(5) :816–827, 2005.
- [66] K.F. Warnick and D.V. Arnold. Electromagnetic Green functions using differential forms. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 10(3) :427–438, 1996.
- [67] K.F. Warnick, R. Selfridge, and D.V. Arnold. Teaching electromagnetic field Green functions using differential forms. *Journal of Electromagnetic Waves and Applications*, 10(3) :427–438, 1996.
- [68] V. S. Yuferev and S. V. Yuferev. Skin-effect in arbitrarily shaped cylindrical parallel conductors : generalization of the high frequency approximation. In *Mathematical*

physics, applied mathematics and informatics, volume 206 of *Proc. Lebedev Phys. Inst. Acad. Sci. Russia*, pages 267–289. Nova Sci. Publ., Commack, NY, 1993.

MODÉLISATION MATHÉMATIQUE DE PHÉNOMÈNES ÉLECTROMAGNÉTIQUES DANS DES MATÉRIAUX À FORT CONTRASTE

Résumé

Ce travail est consacré à l'étude de problèmes de transmission d'ondes électromagnétiques dans des matériaux à fort contraste, comme par exemple un corps fortement conducteur entouré d'un matériau diélectrique isolant. On analyse finement le phénomène de l'effet de peau à l'aide de l'analyse asymptotique et de la simulation numérique. On calcule un développement asymptotique multi-échelle à grande conductivité des solutions des équations de Maxwell tridimensionnelles en régime harmonique. Pour valider ce développement, on établit des estimations uniformes des solutions de ces équations pour une conductivité assez grande dans des domaines polyédraux Lipschitziens. Ces estimations ont motivé une étude préliminaire d'un problème de transmission scalaire pour lequel des estimations a priori sont démontrées grâce à la convergence normale d'un développement asymptotique. L'accord des formules théoriques avec les calculs numériques est remarquable.

D'autre part, on présente des conditions de transmission approchées pour un problème de membrane mince séparant deux milieux différents. On étudie le comportement du champ électromagnétique dans une cellule biologique modélisée par un milieu entouré d'une couche mince et plongée dans un milieu ambiant. On calcule des conditions de transmission approchées sur le bord du domaine intérieur équivalentes à la couche mince.

MATHEMATICAL MODELING OF ELECTROMAGNETIC PHENOMENA IN HIGH CONTRAST MEDIA

Abstract

This work consists in the study of transmission problems of electromagnetic waves in high contrast media, like a highly conducting body embedded in an insulating medium. We perform an accurate analysis of the skin effect by the way of the asymptotic analysis and numerical simulations. We derive a scaled asymptotic expansion in the three dimensional case of the harmonic Maxwell equations with high conductivity. We prove uniform estimates with respect to the high conductivity in polyhedral domains with Lipschitz boundaries. These estimates motivate the study of a scalar transmission problem, in which case a priori estimates are obtained by the way of an asymptotic expansion. Numerical simulations in axisymmetric geometry highlight the skin effect and show the expansion accuracy.

Next, we study the behavior of the electromagnetic field in a biological cell modeled by a medium surrounded by a thin layer and embedded in an ambient medium. We derive approximate transmission conditions in order to replace the membrane by these conditions on the boundary of the interior domain.